고등학교 수학 요약노트

Lecture Notes on Highschool Mathematics
Basic Theories, Formulas and Solved Problems

Sooji Shin
http://www.soojishin.com

이 노트는 중학교와 고등학교 과정에서 배우는 수학 내용을 담고 있습니다. 수와 식, 함수와 수열, 미분과 적분, 평면도형과 공간도형, 확률과 통계의 내용을 주제별로 간단하게 정리하고 예제를 실었습니다. 중학교와 고등학교에서 사용되는 교과서를 참고하여 작성하였습니다.

이 노트는 고등학교 과정의 수학을 한 번 공부한 사람이 복습용으로 사용하거나 또는 고등학교 과정의 수학을 가르치는 사람이 수업 준비용으로 사용하기에 적절하게 작성되었습니다. 이 노트를 개인 학습용 또는 수업 준비용으로만 사용하고, 상업적 용도로 사용하지 마십시오.

최종수정일 : 2014년 8월 11일 (2판)

내용 순서

수와 식

함수와 수열

미분과 적분

평면도형과 공간도형

확률과 통계

여러 가지 표

1판에서는 고등학교 수학 과목의 이름에 따라 내용을 정리하였으나
2판에서는 연관성이 높은 내용을 묶어 정리하였습니다.

수와 식

Sooji Shin • soojishin@live.com

이 노트에서는 고등학교에서 배우는 수학의 내용 중 수와 식에 관련된 개념과 공식을 정리하고 그에 따른 예제와 풀이를 소개합니다. 필요한 경우 중학교 과정의 내용도 포함하고 있습니다. 이 노트에서 포함하고 있는 내용은 다음과 같습니다.

- 집합과 명제
- 수 체계
- 식의 계산과 인수분해
- 방정식과 부등식
- 행렬

이 노트가 수학을 공부하는 분들께 도움이 되기를 바랍니다.

1 집합

주어진 조건에 의하여 그 대상이 분명하게 결정되는 모임을 **집합**이라고 부른다. 그리고 집합에 속해 있는 대상을 **원소**라고 부른다. a가 A의 원소인 것을 $a\in A$로 나타낸다. 원소가 하나도 없는 집합을 **공집합**이라고 부르며 $\varnothing$으로 나타낸다.

두 집합 A, B에 대하여 A의 모든 원소가 B의 원소일 때, A를 B의 **부분집합**이라고 부르고 $A\subset B$로 표기한다. [$A\subset B$를 $A\subseteq B$로 나타내기도 한다.] 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이며, 공집합은 모든 집합의 부분집합이다.

부분집합의 성질

집합 A, B, C와 공집합 $\varnothing$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\varnothing\subset A$, $A\subset A$

(2) $A\subset B$이고 $B\subset A$이면 $A=B$.

(3) $A\subset B$이고 $B\subset C$이면 $A\subset C$.

두 집합 A, B에 대하여 다음과 같이 정의한다.

- **합집합** : $A\cup B=\{x\,|\,x\in A$ 또는 $x\in B\}$
- **교집합** : $A\cap B=\{x\,|\,x\in A$ 그리고 $x\in B\}$
- **차집합** : $A-B=\{x\,|\,x\in A$ 그리고 $x\notin B\}$

(차집합을 $A\setminus B$로 나타내기도 한다.)

집합 연산의 법칙

집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$ (교환법칙)

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (결합법칙)

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (분배법칙)

예제 1. 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 두 조건

$$A\cap X=X,\ n(X)=3$$

을 모두 만족시키는 집합 X의 개수를 구하여라.

풀이 $A\cap X=X$이므로 $X\subset A$가 성립한다. 즉 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 3인 것을 찾으면 된다. 이것은 서로 다른 5개의 물건 중에서 3개를 고르는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

이다. 즉 답은 10개이다. □

주어진 집합 U에 대하여 그의 부분집합 A를 생각할 때, 처음에 주어진 집합 U를 **전체집합**이라고 부른다. U가 전체집합이고 A가 전체집합의 부분집합일 때 A의 **여집합**을

$$A^c=\{x\,|\,x\in U,\ x\notin A\}=U-A$$

로 정의한다.

원소의 개수가 무한인 집합을 **무한집합**이라고 부르고, 원소의 개수가 유한인 집합을 **유한집합**이라고 부른다. 유한집합의 원소의 개수를 $n(A)$와 같이 나타낸다. $n(\varnothing)=0$이다. 참고로 합집합의 원소의 개수는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

특히 세 집합의 합집합의 원소의 개수는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)&=n(A)+n(B)+n(C)\\&\quad-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\\&\quad+n(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

이와 같은 원리를 **포함-배제의 원리**라고 부른다.

예제 2. 60명의 학생에게 A, B 두 문제를 풀게 하였더니 A를 푼 학생은 36명, B를 푼 학생은 41명, A와 B를 모두 풀지 못한 학생은 4명이었다. 이때 A만 푼 학생의 수를 구하여라.

풀이 문제 A를 푼 학생들의 집합을 A, 문제 B를 푼 학생들의 집합을 B라고 하자. 그러면

$$n(A\cup B)=60-4=56,\ n(A)=36,\ n(B)=41$$

이므로 $n(A\cap B)=36+41-56=21$이다. 따라서 문제 A만 푼 학생의 수는 $n(A)-n(A\cap B)=36-21=15$(명)이다. □

전체집합과 여집합의 성질

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $U^c=\varnothing$, $\varnothing^c=U$

(2) $(A^c)^c=A$

(3) $A\cup A^c=U$, $A\cap A^c=\varnothing$

(4) $A-B=A\cap B^c$

(5) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ (드 모르간의 법칙)

(6) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$ (드 모르간의 법칙)

예제 3. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음을 간단히 하여라.

(1) $(A\cup B)\cap A^c$ (2) $(A-B)\cup(B-A^c)$

풀이 (1) $(A\cup B)\cap A^c=(A\cap A^c)\cup(B\cap A^c)=\varnothing\cup(B\cap A^c)$
$=B\cap A^c=B-A.$

(2) $(A-B)\cup(B-A^c)=(A\cap B^c)\cup(B\cap A)$
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap B)=A\cap(B^c\cup B)=A\cap U=A.$ □

2 명제

참 또는 거짓 중 하나로만 결정되는 문장을 **명제**라고 부른다. 명제 p에 대하여 'p가 아니다'를 명제 p의 **부정**이라고 부르며 기호로 $\sim p$로 나타낸다.

변수 x를 포함하는 문장 중에서 x의 값이 결정됨에 따라 명제가 되는 것을 **조건**이라고 부른다. 전체집합 U의 원소 중에서 조건 p가 참이 되게 하는 모든 원소의 집합을 조건 p의 **진리집합**이라고 부른다. 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때, $\sim p$의 진리집합은 P^c이다.

명제와 진리집합의 관계 1

명제 $p\rightarrow q$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 다음이 성립한다.

① $P\subset Q$이면 명제 $p\rightarrow q$는 참이다.
② $P\not\subset Q$이면 명제 $p\rightarrow q$는 거짓이다.

보기 4. 명제 '$x>0$이면 $x^2>0$이다'는 참이다. 왜냐하면 두 집합 $P=\{x\,|\,x>0\}$, $Q=\{x\,|\,x^2>0\}$에 대하여 $P\subset Q$이기 때문이다. □

보기 5. 명제 'x가 실수이면 $x^2\ge 0$이다'는 참이다. 왜냐하면 'x가 실수이다'의 진리집합과 $x^2\ge 0$의 진리집합은 모두 $\mathbb{R}$로서 같기 때문이다. 그러나 'x가 복소수이면 $x^2\ge 0$이다'는 거짓이다. 왜냐하면 복소수이지만 제곱하였을 때 0보다 작은 수가 존재하기 때문이다. □

명제와 진리집합의 관계 2

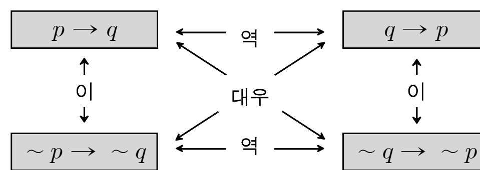
전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라고 하면 다음이 성립한다.

① $P=U$일 때 '모든 x에 대하여 p이다'는 참이다.
② $P\neq\varnothing$일 때 'p가 성립하는 x가 존재한다'는 참이다.

참고 여러 가지 명제의 부정은 다음과 같다.

- 'p 그리고 q'의 부정은 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'이다.
- 'p 또는 q'의 부정은 '$\sim p$ 그리고 $\sim q$'이다.
- '모든 x에 대하여 p이다'의 부정은 '$\sim p$가 성립하는 x가 존재한다'이다.
- 'p가 성립하는 x가 존재한다'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$'이다. □

두 조건 p, q에 대하여 다음과 같이 정의한다.



명제와 대우의 관계

(1) 명제 $p\rightarrow q$가 참이면 대우 $\sim q\rightarrow\ \sim p$도 참이다.
(2) 명제 $p\rightarrow q$가 거짓이면 대우 $\sim q\rightarrow\ \sim p$도 거짓이다.

증명 p의 진리집합을 P라고 하고 q의 진리집합을 Q라고 하자. 그러면 $P\subset Q$일 필요충분조건은 $Q^c\subset P^c$인 것이다. 따라서 $p\rightarrow q$의 참·거짓 여부와 $\sim q\rightarrow\ \sim p$의 참·거짓 여부는 일치한다. ■

예제 6. 명제 'x가 1보다 크면 x는 양수이다'의 역, 이, 대우를 구하고 각각 참, 거짓을 밝혀라.

풀이 역 : 'x가 양수이면 x는 1보다 크다' (거짓)
이 : 'x가 1보다 크지 않으면 x는 양수가 아니다' (거짓)
대우 : 'x가 양수가 아니면 x는 1보다 크지 않다' (참) □

명제 $p\rightarrow q$가 참일 때 기호로 $p\Rightarrow q$로 나타낸다. 이때 p는 q이기 위한 **충분조건**이라고 하고, q는 p이기 위한 **필요조건**이라고 한다. 또 $p\Rightarrow q$이면서 $q\Rightarrow p$인 것을 기호로 $p\Leftrightarrow q$로 나타내고 p는 q이기 위한 **필요충분조건**이라고 한다.

예제 7. 조건 p, q가 다음과 같이 주어졌을 때, p는 q이기 위한 어떤 조건인지 구하여라. (단, x, a, b는 실수이다.)

(1) p : $x=3$ q : $2x=6$
(2) p : $a-b=0$ q : $a^2=b^2$
(3) p : $x^2=3x$ q : $x=0$

풀이 (1) 필요충분조건
(2) 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
(3) 필요조건이지만 충분조건은 아니다. □

예제 8. 다음 문장의 부정을 말하여라.

(1) 이 세상에는 커피를 마시지 못하는 사람이 있다.
(2) 모든 땅강아지의 다리의 수는 여섯 개이다.
(3) 그는 저녁에 영화를 보거나 잠을 잘 것이다.
(4) 수지는 노래도 잘 하고 춤도 잘 춘다.

풀이 (1) 이 세상에 커피를 마시지 못하는 사람은 없다.
(이 세상의 모 든 사람은 커피를 마실 수 있다.)
(2) 다리의 수가 여섯 개가 아닌 땅강아지도 있다.
(3) 그는 저녁에 영화를 보지 않고 잠도 자지 않을 것이다.
(4) 수지는 노래를 잘 하지 못하거나 춤을 잘 추지 못한다. □

3 실수

물건의 개수를 셀 때 자연스럽게 사용하는 수를 자연수라고 부른다. 즉 1부터 시작해서 1씩 더해서 만들 수 있는 수를 **자연수**라고 부른다. 자연수 전체 집합은 $\mathbb{N}$으로 나타낸다.

같은 수를 여러 번 곱하는 것을 **거듭제곱**이라고 부른다. 예를 들어 $2\times2\times2=2^3$이다. 여기서 2를 **밑**, 3을 **지수**라고 부른다.

두 자연수의 공약수 중에서 가장 큰 자연수를 **최대공약수**라고 부른다. 그리고 공배수 중에서 가장 작은 자연수를 **최소공배수**라고 부른다. 두 자연수를 소인수분해한 뒤 지수가 더 작은 것만 골라서 곱하면 최대공약수가 되고, 지수가 더 큰 것만 골라서 곱하면 최소공배수가 된다.

예제 9. 24와 180의 최대공약수와 최소공배수를 구하여라.

풀이 두 수를 소인수분해하면 $24=2^3\times3$, $180=2^2\times3^2\times5$이므로 최대공약수는 $2^2\times3=12$이고 최소공배수는 $2^3\times3^2\times5=360$이다. □

참고 최대공약수는 greatest common divisor을 줄여 gcd이라고 쓰는 경우가 많고, 최소공배수는 least common multiple을 줄여 lcm이라고 쓰는 경우가 많다. □

자연수에 0과 음수의 개념을 추가한 것을 **정수**라고 부른다. 정수 전체 집합은 $\mathbb{Z}$로 나타낸다.

분모와 분자가 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수를 **유리수**라고 부른다. [단, 분모가 0인 경우는 당연히 제외한다.] 유리수 전체 집합은 $\mathbb{Q}$로 나타낸다. 유리수의 몇 가지 성질은 다음과 같다.

> **유리수의 성질**
> (1) 분모와 분자가 정수인 분수를 소수로 바꾸면 유한소수가 되거나 순환하는 무한소수가 된다.
> (2) 모든 유한소수와 순환소수는 분모와 분자가 정수인 분수로 나타낼 수 있다.
> (3) 분모와 분자가 정수인 기약분수의 분모를 소인수분해했을 때 소인수가 2와 5밖에 없으면 그 분수는 유한소수로 나타낼 수 있다.

참고 0을 제외한 모든 유한소수는 무한소수로 나타낼 수 있다. 예를 들어 3.56은 $3.5\dot{9}$로 나타낼 수 있다. □

참고 순환소수의 반복되는 최소의 숫자배열을 **순환마디**라고 부르며, 표기할 때에는 첫 순환마디의 첫 번째 숫자와 마지막 숫자 위에 점을 찍고 이후 숫자는 쓰지 않는다. 순환소수를 간단하게 나타내고 그것을 읽는 예는 다음과 같다.

$0.444\cdots=0.\dot{4}$ (영 점 사 순환마디 사)
$31.2535353\cdots=31.2\dot{5}\dot{3}$ (삼십일 점 이오삼 순환마디 오삼)
$0.2023023023\cdots=0.2\dot{0}2\dot{3}$ (영 점 영이삼 순환마디 영이삼)

예제 10. 다음 분수를 소수로 나타내었을 때 유한소수로 나타낼 수 있는지 판별하여라.

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{4}{25}$
(4) $\frac{2}{11}$ (5) $\frac{7}{48}$ (6) $\frac{24}{75}$

풀이 (1) $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$: 유한소수로 나타낼 수 있다.
(2) $\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$: 유한소수로 나타낼 수 없다.
(3) $\frac{4}{25}=\frac{4}{5^2}$: 유한소수로 나타낼 수 있다.
(4) $\frac{2}{11}=\frac{2}{11}$: 유한소수로 나타낼 수 없다.
(5) $\frac{7}{48}=\frac{6}{2^4\times3}$: 유한소수로 나타낼 수 없다.
(6) $\frac{24}{75}=\frac{8}{25}=\frac{8}{5^2}$: 유한소수로 나타낼 수 있다. □

수직선 위에 점으로 나타낼 수 있는 수를 **실수**라고 부른다. 실수 전체 집합은 $\mathbb{R}$로 나타낸다. 실수이지만 유리수가 아닌 수를 **무리수**라고 부른다. 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타난다.

> **수의 연산 법칙**
> (1) $a+b=b+a$, $ab=ba$ (교환법칙)
> (2) $(a+b)+c=a+(b+c)$, $a(bc)=(ab)c$ (결합법칙)
> (3) $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$ (분배법칙)

집합 A의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 어떤 연산 $\circ$을 한 결과가 항상 A의 원소일 때, 즉 $a\circ b\in A$일 때, 집합 A는 연산 $\circ$에 대하여 **닫혀있다**고 말한다.

집합 A가 연산 $\circ$에 대하여 닫혀있을 때, A의 모든 원소 a에 대하여 $a\circ e=e\circ a=a$를 만족시키는 A의 원소 e가 존재하면 e를 연산 $\circ$에 대한 **항등원**이라고 부른다. 또 집합 A의 원소 a에 대하여 $a\circ x=x\circ a=e$를 만족시키는 A의 원소 x가 존재하면 x를 연산 $\circ$에 대한 a의 **역원**이라고 부른다.

> **실수 전체 집합에서의 항등원과 역원**
> (1) 덧셈에 대한 항등원 0
> (2) 곱셈에 대한 항등원 1
> (3) 임의의 실수 a의 덧셈에 대한 역원 $-a$
> (4) 0이 아닌 임의의 실수 a의 곱셈에 대한 역원 $\frac{1}{a}$

위와 같은 내용이 어려운 것은 아니지만 용어가 혼동될 때가 많다. 따라서 용어를 잊지 않도록 평소에 정확하게 표현하는 연습을 해야 한다.

실수의 대소 관계에 대한 기본 성질

(1) 임의의 실수 a에 대하여 다음 중 하나만 성립한다.

$$a>0,\ a=0,\ a<0$$

(2) $a>0$이고 $b>0$이면 $a+b>0$, $ab>0$이다.

(3) $a>0$이면 $-a<0$이고, $a<0$이면 $-a>0$이다.

참고 $a>b$일 필요충분조건은 $a-b>0$인 것이다.

예제 11. 실수 a, b, c에 대하여 다음을 증명하여라.

(1) $a>b$이고 $b>c$이면 $a>c$이다.

(2) $a>b$이면 $a+c>b+c$이다.

(3) $a>b$이고 $c>0$이면 $ac>bc$이다.

(4) $a>b$이고 $c<0$이면 $ac<bc$이다.

풀이 (1) $a>b$이므로 $a-b>0$이다. 또한 $b>c$이므로 $b-c>0$이다. 따라서

$$a-c=(a-b)+(b-c)=(\text{양수})+(\text{양수})>0$$

이므로 $a>c$이다.

(2) $a>b$이므로 $a-b>0$이다. 따라서

$$(a+c)-(b+c)=a-b>0$$

이므로 $a+c>b+c$이다.

(3) $a-b>0$이므로

$$ac-bc=(a-b)c=(\text{양수})\times(\text{양수})>0$$

이다. 따라서 $ac>bc$이다.

(4) $a-b>0$이고 $-c>0$이므로

$$bc-ac=(a-b)(-c)=(\text{양수})\times(\text{양수})>0$$

이다. 따라서 $bc>ac$이다. □

4 복소수

제곱하여 -1이 되는 수 중 하나를 i로 표기하고 **허수단위**라고 부른다. 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $a+bi$로 나타낼 수 있는 수를 **복소수**라고 부른다. 이때 a를 **실수부분**, b를 **허수부분**이라고 부른다. 실수가 아닌 복소수를 **허수**라고 부른다.

복소수의 상등

실수 a, b, c, d에 대하여

$$a+bi=c+di \ \Leftrightarrow\ a=c,\ b=d$$

참고 위 법칙에서 a, b, c, d가 실수라는 조건이 빠지면 안 된다. 예를 들어 $a+bi=-1+i$일 때 a, b가 실수라는 조건이 없으면 $a=i$, $b=i$일 수도 있다. □

예제 12. 실수 x, y에 대하여 $2+(x^2+2x)i=y-i$가 성립할 때 x, y의 값을 구하여라.

풀이 $y=2$이고, $x^2+2x=-1$이므로 $x=-1$이다. □

실수 a, b에 대하여 $a-bi$를 $a+bi$의 **켤레복소수**라고 부른다. 복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$로 나타낸다.

복소수도 실수처럼 덧셈과 곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립한다. 특히 복소수의 사칙계산은 다음과 같다.

복소수의 사칙계산

실수 a, b, c, d에 대하여 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$일 때

① $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

② $z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

③ $z_1z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

④ $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

위 공식에서 덧셈, 뺄셈, 곱셈은 실수의 사칙계산 법칙을 이용하면 자연스럽게 계산할 수 있으므로 공식을 억지로 외울 필요가 없다. 또한 복소수의 나눗셈은 분모와 분자에 똑같이 분모의 켤레복소수를 곱하면 된다고 기억하면 좋다.

a가 양수일 때 제곱하여 a가 되는 실수는 2개가 있는데, 그 수를 a의 **제곱근**이라고 부른다. [단, 0의 제곱근은 0이다.] 그리고 a의 제곱근 중에서 음이 아닌 것을 $\sqrt{a}$로 나타낸다.

제곱근

$a\ge 0$, $b\ge 0$일 때 다음이 성립한다.

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(2) $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ (단, $a\ne 0$)

(3) $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

예제 13. 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+4\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{24}+2\sqrt{54}-\sqrt{150}$

(3) $\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)$

(4) $\sqrt{18}\div\sqrt{6}+2\sqrt{3}$

풀이 (1) (준식)$=(3-5+4)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

(2) (준식)$=2\sqrt{6}+6\sqrt{6}-5\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

(3) (준식)$=(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}$

(4) (준식)$=\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ □

복소수를 이용하면 다음과 같이 음수의 제곱근을 계산할 수 있다.

음수의 제곱근

(1) $a>0$일 때 다음이 성립한다.

① $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

② $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$이다.

(2) $a<0$, $b<0$일 때 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

(3) $a>0$, $b<0$일 때 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

예제 14. 다음을 $a+bi$의 꼴로 나타내어라. (단, a, b는 실수)

(1) $\sqrt{-8}-\sqrt{-2}$ (2) $\sqrt{-27}+2\sqrt{-3}$

(3) $\sqrt{-2}\sqrt{-8}$ (4) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}$

풀이 (1) $\sqrt{-8}-\sqrt{-2}=2\sqrt{2}i-\sqrt{2}i=\sqrt{2}i$.

(2) $\sqrt{-27}+2\sqrt{-3}=3\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i=5\sqrt{3}i$.

(3) $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\times2\sqrt{2}i=-4$

(4) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=\dfrac{2\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}}=-2i$. □

5 다항식

수와 문자가 덧셈, 뺄셈, 곱셈으로 결합된 것을 **다항식**이라고 부른다. 다항식에 관련된 용어는 다음과 같은 것들이 있다.

- **항** : 곱으로 묶인 하나의 덩어리
- **상수항** : 문자가 없고 수만 있는 항
- **단항식** : 하나의 항으로 이루어진 식
- **계수** : 문자 앞에 곱해져 있는 수
- **차수** : 하나의 항에서 곱해진 문자의 개수를 **항의 차수**라고 부르며, 다항식에서 각 항의 차수 중 가장 큰 값을 **식의 차수**라고 부른다.
- **동류항** : 문자와 차수가 같은 항

예를 들어 식

$$3x^2-xy+4y+1$$

은 항이 4개인 이차식이며 $3x^2$과 xy는 이차항, $4y$는 일차항, 1은 상수항이다. $3x^2$의 계수는 3이고, $-xy$의 계수는 -1이다. $-xy$는 그 자체로는 이차항이지만 x에 대한 일차항이기도 하고 y에 대한 일차항이기도 하다.

다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 때에는 동류항끼리 계산하면 된다. 다항식의 곱셈을 할 때에는 다음과 같은 지수법칙을 이용한다.

지수법칙 a와 b가 0이 아닌 실수이고 m과 n이 자연수일 때 다음이 성립한다.

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n=a^{mn}$

(3) $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ($m>n$인 경우)

$a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}$ ($m<n$인 경우)

$a^m\div a^n=1$ ($m=n$인 경우)

(4) $(ab)^n=a^n b^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

곱해져 있는 식의 괄호를 풀어 나타내는 것을 **전개한다**고 하며, 전개하여 나타낸 식을 **전개식**이라고 부른다. 또한 전개되어 있는 다항식을 문자를 포함한 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 **인수분해**라고 부른다. 전개 · 인수분해 공식은 다음과 같다.

다항식의 곱셈공식

(1) 이차식의 곱셈공식

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
- $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
- $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(2) 삼차식의 곱셈공식

- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

곱셈공식을 외우지 않아도 다항식의 기본적인 곱셈은 할 수 있다. 그러나 식의 변형에서 곱셈공식이 필요하며 특히 인수분해할 때 곱셈공식을 거꾸로 사용하므로 곱셈공식을 자연스럽게 사용할 수 있도록 연습해야 한다.

예제 15. $x+y=3$, $xy=1$일 때 $(x-y)^2$의 값을 구하여라.

풀이 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=3^2-4=5$. □

예제 16. $x^2+x+1=0$일 때 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ (2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

풀이 주어진 식의 양변을 x로 나누면 $x+\dfrac{1}{x}=-1$이다.

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(-1)^2-2=-1$.

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(-1)^3-3(-1)=2$. □

예제 17. 다음 식을 인수분해하여라.

(1) a^2+2a+1 (2) $x^2-14x+49$

(3) $4x^2+12x+9$ (4) $x^2+4xy-21y^2$

풀이 (1) $(a+1)^2$ (2) $(x-7)^2$

(3) $(2x+3)^2$ (4) $(x+7y)(x-3y)$ □

참고 인수분해의 결과는 하나로 결정되지 않는다. 예를 들어 $6x^2-6x-12$는 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$\begin{aligned}6x^2-6x-12&=(2x+2)(3x-6)\\&=2(x+1)(3x-6)\\&=6(x+1)(x-2)\\&=3(2x+2)(x-3)\\&=12\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)(x-2)\end{aligned}$$

이것들은 모두 바르게 인수분해한 것이다. 그러나

$$6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)$$

는 인수분해한 것이 아니다. 왜냐하면 문자를 포함하는 식의 곱으로 나타내야하기 때문이다. □

예제 18. 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3+3x^2+3x+1

(2) x^3-125

(3) x^4+5x^2+6

(4) $(x+y)^2+3(x+y)-4$

(5) $x^2+xy^2+xz+y^2z$

풀이 (1) (준식)$=(x+1)^3$

(2) (준식)$=(x-5)(x^2+5x+25)$

(3) $x^2=X$로 놓으면

(준식)$=X^2+5X+6=(X+2)(X+3)=(x^2+2)(x^2+3)$

(4) $x+y=X$로 놓으면

(준식)$=X^2+3X-4=(X-1)(X+4)$

$=(x+y-1)(x+y+4)$

(5) 주어진 식은 삼차식이며, x에 대한 이차식, y에 대한 이차식, z에 대한 일차식이다. 차수가 낮을수록 인수분해하기 쉬우므로 z에 대하여 내림차순으로 정리하자.

(준식)$=xz+y^2z+x^2+xy^2=(x+y^2)z+x(x+y^2)$

$=(x+z)(x+y^2)$ □

참고 다항식의 인수분해는 계수의 범위에 따라 달라진다. 예를 들어 x^5+x^4+4x+4를 인수분해하면 다음과 같다.

유리수 범위 : $(x^2+2)(x^2-2)(x+1)$

실수 범위 : $(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+1)$

복소수 범위 : $(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+1)$

보통 별다른 언급 없이 인수분해하라고 하면 실수 범위에서 인수분해한다. □

6 항등식과 나머지 정리

문자 x를 포함한 등식에서 x에 어떠한 값을 대입하더라도 등식이 참이 될 때 그 식을 x에 대한 **항등식**이라고 부른다.

> **항등식의 조건**
> $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식일 필요충분조건은 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$인 것이다.

증명 등식

$$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$$

이 x에 대한 다항식이라고 하자. $x=0$을 대입하면 이 등식이 성립해야 하므로 $c=c'$을 얻는다. 따라서 등식의 양변에서 c를 빼면

$$ax^2+bx=a'x^2+b'x$$

를 얻는다. 이 식에 $x=1$, $x=-1$을 차례로 대입하면

$$a+b=a'+b'$$
$$a-b=a'-b'$$

을 얻는다. 두 식을 연립하여 풀면 $a=a'$, $b=b'$을 얻는다.

역으로 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이라고 가정하면 당연히 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 성립한다. ■

참고 위 법칙을 더 확장하면 다음과 같다.

> $p(x)$와 $q(x)$가 n차 다항식일 때 등식 $p(x)=q(x)$가 x에 대한 항등식일 필요충분조건은 $p(x)$와 $q(x)$의 동류항의 계수가 서로 같은 것이다.

예제 19. 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 정하여라.

(1) $x^2+ax+b=(x+1)(x-3)$

(2) $x^2-ax+4=bx(x-2)+c(x+2)(x-1)$

풀이 (1) **계수비교법** : 우변을 전개하면

$$x^2+ax+b=x^2-2x-3$$

이므로 양변을 비교하면 $a=-2$, $b=-3$이다.

(2) **수치대입법** : 식이 간단해지는 적당한 값을 대입해보자.

$x=0$을 대입하면 $4=-2c$이므로 $c=-2$.

$x=1$을 대입하면 $1-a+4=-b$.

$x=2$를 대입하면 $4-2a+4=4c$.

연립하여 풀면 $a=8$, $b=3$, $c=-2$. □

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면 $f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$이고, 이 식은 x에 대한 항등이므로 $x=\alpha$를 대입하면 $f(\alpha)=R$를 얻는다.

> **나머지정리** x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$이다.

예제 20. 다항식 $f(x)=8x^3-3x+1$을 다음 식으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

(1) $x-1$ (2) $x+2$

풀이 (1) $f(1)=6$.

(2) $f(-2)=-64+6+1=-57$. □

참고 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

증명 $f(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+R=\left(x+\frac{b}{a}\right)aQ(x)+R$$

이므로 R는 $f(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 나머지와 같다. 그러므로 $R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다. □

예제 21. $f(x)=3x^3+2x^2-x+1$을 $2x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

풀이 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{8}{8}=\frac{13}{8}$. □

예제 22. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 -3이고 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 5이다. $f(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

풀이 $f(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하면 $R(x)$는 일차식 $R(x)=ax+b$의 꼴로 나타낼 수 있다. 이때 $f(x)=(x-1)(x+3)Q(x)+R(x)$이므로

$$f(1)=R(1)=a+b=-3,$$
$$f(-3)=R(-3)=-3a+b=5$$

이다. 두 식을 연립하면 $a=-2$, $b=-1$을 얻는다. □

인수정리 x에 대한 다항식 $f(x)$가 $x-\alpha$로 나누어 떨어지기 위한 필요충분조건은 $f(\alpha)=0$이다.

예제 23. 다항식 $f(x)=2x^3+ax^2-5x+b$가 $x-1$과 $2x+1$로 각각 나누어 떨어지도록 상수 a, b의 값을 정하여라.

풀이 $f(1)=2+a-5+b=0$,

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a+\frac{5}{2}+6=0.$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=7$, $b=-4$를 얻는다. □

인수정리를 이용한 인수분해 계수가 정수인 다항식 $f(x)$가 정수범위에서 인수분해되면 $f(\alpha)=0$이 되는 정수 α는 다음을 만족시킨다.

$$\alpha=\pm\frac{(\text{상수항의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 약수})}$$

예제 24. 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^4+x^2+1 (2) x^3+x^2-5x+3

풀이 (1) $(x^4+2x^2+1)-x^2=(x^2+1)^2-x^2$
$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$.

(2) $\pm\dfrac{(\text{상수항의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 약수})}$의 값이 ±1, ±3이다. 이것을 각각 x에 대입해보면 $x=1$일 때 식의 값이 0이 되므로 주어진 식은 일차식 $x-1$로 나누어 떨어진다. 즉

$x^3+x^2-5x+3=(x-1)(x^2+2x-3)=(x-1)^2(x+3)$. □

7 유리식과 무리식

P, Q, R이 다항식이고 $P=QR$가 성립할 때 Q와 R를 P의 **약수** 또는 **인수**라고 부르며 P를 Q의 **배수** 또는 R의 배수라고 부른다.

한편 A, B, G, L이 다항식이라고 하자. L이 A의 배수이면서 B의 배수일 때 L을 A와 B의 **공배수**라고 부른다. A와 B가 L보다 더 낮은 차수의 공배수를 갖지 않을 때 L을 **최소공배수**라고 부른다. G가 A의 약수이면서 B의 약수일 때 G를 A와 B의 **공약수**라고 부른다. A와 B가 G보다 더 높은 차수의 공약수를 갖지 않을 때 G를 A와 B의 **최대공약수**라고 부른다.

예제 25. 두 다항식 $A=x^2+3x+2$, $B=x^3+x^2-x-1$의 최대공약수와 최소공배수를 각각 구하여라.

풀이 두 식을 인수분해하면 $A=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, $B=x^3+x^2-x-1=(x+1)^2(x-1)$이므로
최대공약수는 $x+1$,
최소공배수는 $(x+1)^2(x-1)(x+2)$이다. □

두 다항식 A, B가 상수가 아닌 공약수를 갖지 않을 때 A와 B는 **서로소**라고 말한다.

공약수와 공배수의 성질
A, B, L, G가 최고차항의 계수가 1인 다항식이라고 하자. 또한 A, B의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라고 하자. 이때 다음이 성립한다.

- $A=aG$, $B=bG$이고 서로소인 두 식 a, b가 존재한다.
- $L=abG$
- $AB=LG$

예제 26. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x+2$이고 최소공배수가 x^3-7x-6일 때 두 다항식을 구하여라.

풀이 최소공배수가 $x^3-7x-6=(x+1)(x+2)(x-3)$이므로 두 다항식은 $(x+1)(x+2)$와 $(x+2)(x-3)$이다. □

유리식의 사칙계산
유리식의 사칙계산은 분수의 사칙계산과 동일한 법칙에 따라 계산한다.

예제 27. 유리식의 덧셈 $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{4x-9}{2x^2+5x-3}$를 계산하여라.

풀이 통분한 후 계산한다.

$$(\text{준식})=\frac{x}{x+3}+\frac{4x-9}{(2x-1)(x+3)}$$
$$=\frac{x(2x-1)+(4x-9)}{(2x-1)(x+3)}=\frac{2x^2+3x-9}{(2x-1)(x+3)}$$
$$=\frac{(2x-3)(x+3)}{(2x-1)(x+3)}=\frac{2x-3}{2x-1}\quad(\text{단, } x\neq-3).$$ □

분모에 $a+b\sqrt{c}$ 꼴의 무리수가 있을 때, 분모와 분자에 똑같이 $a-b\sqrt{c}$를 곱하면 분모의 무리수가 없어진다. 이렇게 분모의 무리수 또는 무리식을 유리수 또는 유리식으로 만드는 것을 **분모의 유리화**라고 부른다.

예제 28. 다음 분수의 분모를 유리화하여라.

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{-1}{2-\sqrt{3}}$

풀이 (1) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

(2) $\dfrac{-1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{-1(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=-2-\sqrt{3}$. □

근호 안에 근호가 있는 것을 **이중근호**라고 부른다. 특별한 꼴의 이중근호는 이차식의 인수분해 공식을 이용하여 풀 수 있다.

> **이중근호의 풀이**
> (1) a, b가 양수일 때 $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$
> (2) $a \geq b > 0$일 때 $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

증명 (1) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$
$=\sqrt{(\sqrt{a})^2+2(\sqrt{a})(\sqrt{b})+(\sqrt{b})^2}$
$=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

(2) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$
$=\sqrt{(\sqrt{a})^2-2(\sqrt{a})(\sqrt{b})+(\sqrt{b})^2}$
$=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ■

예제 29. 다음 식의 이중근호를 풀어 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$ (2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$
(3) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$ (4) $\sqrt{4-\sqrt{15}}$

풀이 (1) $\sqrt{12+2\sqrt{35}}=\sqrt{7+5+2\sqrt{7\cdot5}}=\sqrt{7}+\sqrt{5}$.
(2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2-2\sqrt{3\cdot2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.
(3) $\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{4+3+2\sqrt{4\cdot3}}=2+\sqrt{3}$.
(4) $\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5+3-2\sqrt{5\cdot3}}}{\sqrt{2}}$
$=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$. □

8 방정식

$P(x)$가 다항식일 때

$$P(x)=0$$

의 꼴로 나타낼 수 있는 방정식을 **다항방정식**이라고 부른다. 이때 $P(x)$의 차수에 따라서 위 방정식의 이름이 달라진다. 예를 들어 $P(x)$가 일차식이면 위 방정식을 **일차방정식**이라고 부르고 $P(x)$가 이차식이면 위 방정식을 **이차방정식**이라고 부른다.

방정식 $P(x)=0$이 참이 되도록 하는 x의 값을 이 방정식의 **근**이라고 부른다. 또한 방정식의 근과 그 근을 구하는 과정을 포함한 전체를 방정식의 **해**라고 부른다. [그러나 보통은 해를 근과 같은 뜻으로 사용한다.]

> **일차방정식의 근**
> x에 대한 방정식 $ax+b=0$의 근은 다음과 같다.
> ① $a\neq0$이면 근은 $x=-\dfrac{b}{a}$이다.
> ② $a=0$이고 $b\neq0$이면 해가 없다.
> ③ $a=0$이고 $b=0$이면 해는 모든 실수이다.
> ($a=0$일 때 $ax+b=0$은 일차방정식이 아니다.)

방정식의 근을 구하는 것을 **방정식을 푼다**고 말한다.

예제 30. 다음 일차방정식을 풀어라.

(1) $x-4=0$ (2) $2x+3=0$
(3) $4x=2$ (4) $-x+2=3x+6$

풀이 (1) $x=4$ (2) $x=-\dfrac{3}{2}$
(3) $x=\dfrac{1}{2}$ (4) $x=-1$ □

> **이차방정식의 근**
> x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 풀이 방법은 다음과 같다.
> ① 좌변이 $(mx+n)(rx+s)=0$으로 인수분해되면 근은
> $x=-\dfrac{n}{m}$ 또는 $x=-\dfrac{s}{r}$이다.
> ② 식이 $a(x-m)^2=n$인 완전제곱꼴로 변형되면 근은
> $x=m\pm\sqrt{\dfrac{n}{a}}$ 이다.
> ③ 근의 공식은 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이다.

예제 31. 다음 이차방정식을 인수분해를 이용하여 풀어라.

(1) $x^2+2x-3=0$ (2) $9x^2+6x+1=0$

풀이 (1) $(x+3)(x-1)=0$이므로 $x=-3$ 또는 $x=1$.
(2) $(3x+1)^2=0$이므로 $x=-\dfrac{1}{3}$ (중근).

예제 32. 다음 이차방정식을 완전제곱식을 이용하여 풀어라.

(1) $x^2+4x+1=0$ (2) $3x^2-5x-1=0$

풀이 (1) $x^2+4x=-1$
$\Rightarrow x^2+4x+2^2=-1+2^2$
$\Rightarrow (x+2)^2=3$
$\Rightarrow x+2=\pm\sqrt{3}$
$\Rightarrow x=-2\pm\sqrt{3}$.

(2) $x^2-\dfrac{5}{3}x-\dfrac{1}{3}=0$
$\Rightarrow x^2-\dfrac{5}{3}x=\dfrac{1}{3}$
$\Rightarrow x^2-\dfrac{5}{3}x+\left(-\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{5}{6}\right)^2$
$\Rightarrow \left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{37}{36}$
$\Rightarrow x-\dfrac{5}{6}=\pm\sqrt{\dfrac{37}{36}}=\pm\dfrac{\sqrt{37}}{6}$
$\Rightarrow x=\dfrac{5}{6}\pm\dfrac{\sqrt{37}}{6}=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{6}$. □

예제 33. 다음 이차방정식을 근의 공식을 이용하여 풀어라.

(1) $x^2+4x-2=0$ (2) $2x^2+7x+2=0$

풀이 (1) $x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times2\times(-2)}}{2\times1}=-2\pm\sqrt{6}$.

(2) $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times2\times2}}{2\times2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{33}}{4}$. □

이차방정식의 근의 공식에서 근호 안의 식 b^2-4ac를 **판별식**이라고 부르며 보통 D로 나타낸다.

이차방정식의 판별식

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

- $D>0$ $\Leftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 가진다.
- $D=0$ $\Leftrightarrow$ 중근(서로 같은 두 실근)을 가진다.
- $D<0$ $\Leftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 가진다.

예제 34. 이차방정식 $x^2-kx+3k=0$이 중근을 갖도록 k의 값을 정하여라.

풀이 판별식이 0이어야 하므로 $D=(-k)^2-4\cdot1\cdot3k=0$이다. 이것을 풀면 $k=0$ 또는 $k=12$이다. □

이차방정식의 근의 성질

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라고 하면

(1) 근과 계수의 관계 : $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$.

(2) 좌변의 인수분해 : $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$.

예제 35. 이차방정식 $2x^2-x-4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때 식 $\alpha^3+\beta^3$의 값을 구하여라.

풀이 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot(-2)\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{8}.$$ □

예제 36. 식 x^2-4x+6을 복소수 범위에서 인수분해하여라.

풀이 방정식 $x^2-4x+6=0$의 해를 구하면 $x=2\pm\sqrt{2}i$이므로 $x^2-4x+6=(x-2-\sqrt{2}i)(x-2+\sqrt{2}i)$. □

참고 고차방정식의 근과 계수의 관계를 생각할 수 있다.

(1) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면 다음이 성립한다.

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}.$$

(2) 사차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$의 네 근을 α, β, γ, δ라고 하면 다음이 성립한다.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-\frac{d}{a},\quad \alpha\beta\gamma\delta=\frac{e}{a}.$$ □

두 수를 근으로 갖는 이차방정식

α, β를 근으로 갖고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

예제 37. 두 수 $1+2i$ $1-2i$를 근으로 갖고 x^2의 계수가 2인 이차방정식을 구하여라.

풀이 두 근의 합이 2이고, 두 근의 곱이 5이므로 구하는 이차방정식은 $2(x^2-2x+5)=0$이다. 즉 $2x^2-4x+10=0$이다. □

고차방정식의 풀이 고등학교 과정에서 삼차방정식과 사차방정식의 풀이는 인수분해를 잘 하면 된다.

예제 38. 방정식 $x^4-3x^3-x+3=0$을 풀어라.

풀이 $x^4-3x^3-x+3=(x-1)(x-3)(x^2+x+1)$이므로

근은 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다. □

켤레근 계수가 실수인 다항방정식의 한 해가 $a+bi$ (a, b는 실수)이면 다른 한 해는 $a-bi$이다. 이때 $a+bi$와 $a-bi$를 서로 **켤레근**이라고 부른다.

예제 39. 계수가 실수인 방정식 $x^4+ax^3+bx^2-19x+10=0$의 한 근이 $1+2i$일 때 나머지 세 근을 구하여라.

풀이 다른 한 근은 $1-2i$이므로 주어진 방정식의 좌변은

$$(x-1-2i)(x-1+2i)(x^2+Ax+B)$$

로 인수분해된다. 이 식을 전개하여 방정식의 좌변과 비교하는 방법, 즉 계수비교법을 이용하면 $A=-3$, $B=2$를 얻는다. 따라서 주어진 방정식은

$$(x-1-2i)(x-1+2i)(x^2-3x+2)=0$$

이므로 나머지 세 근은 $1-2i$, 1, 2이다. □

미지수에 대한 유리식으로 이루어진 방정식을 **유리방정식**이라고 부른다. 특히 미지수에 대한 분수식을 포함하는 유리방정식을 **분수방정식**이라고 부른다.

분수방정식의 풀이

분수방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.

① 분수방정식의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 다항식으로만 이루어진 방정식으로 고친다.

② ①에서 얻은 방정식을 푼다.

③ ②에서 얻은 근 중에서 무연근을 제외한 나머지를 근으로 한다.

참고 분수방정식을 다항방정식으로 바꾸어 풀어 얻은 근 중에서 본래 분수방정식의 근이 되지 않는 것을 **무연근**이라고 부른다.

예제 40. 다음 분수방정식을 풀어라.

$$\frac{x}{x+2}-\frac{1}{x}=\frac{4}{x^2+2x}$$

풀이 주어진 분수방정식의 양변에 분모의 최소공배수 $x(x+2)$를 곱하면 $x^2-(x+2)=4$이다. 이것을 정리하여 풀면

$$x^2-x-6=0,\quad x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

그런데 $x=-2$는 주어진 분수방정식의 분모를 0이 되게 하므로 무연근이다. 따라서 구하는 근은 $x=3$이다. □

예제 41. 다음 분수방정식을 풀어라.

$$\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-7}$$

풀이 주어진 분수방정식을 변형하면

$$\frac{2x-10}{(x-4)(x-6)}=\frac{2x-10}{(x-3)(x-7)}$$

이다. 양변에 분모의 최소공배수 $(x-4)(x-6)(x-3)(x-7)$을 곱하면

$$(2x-10)(x-3)(x-7)=(2x-10)(x-4)(x-6)$$

이고 이것을 풀면 $x=5$이다. 이 근은 주어진 분수방정식의 분모를 0이 되게 하지 않으므로 근이다. □

예제 42. 다음 분수방정식을 풀어라.

$$\frac{x^2-x}{4}+\frac{3}{x^2-x}=2$$

풀이 $x^2-x=X$로 놓으면 주어진 분수방정식은

$$\frac{X}{4}+\frac{3}{X}=2$$

양변에 최소공배수 $4X$를 곱하여 정리하여 풀면

$$X^2-8X+12=0 \quad \therefore\ X=2 \text{ 또는 } X=6$$

(i) $X=2$일 때, $x^2-x=2$이므로 $x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $X=6$일 때 $x^2-x=6$이므로 $x=-2$ 또는 $x=3$

이 값들은 모두 주어진 분수방정식의 분모를 0이 되게 하지 않으므로 근이다. □

예제 43. 지수와 민지가 컴퓨터를 조립하려고 한다. 지수가 혼자 조립하는 데 걸리는 시간은 민지가 혼자 조립하는 데 걸리는 시간보다 2시간만큼 더 걸린다고 한다. 두 사람이 함께 컴퓨터를 조립하면 1시간 20분이 걸린다고 할 때, 민지가 혼자 컴퓨터를 조립하는 데 걸리는 시간을 구하여라.

풀이 민지가 혼자 컴퓨터를 조립하는 데 걸리는 시간을 x시간이라고 하면 지수가 혼자 컴퓨터를 조립하는 데 걸리는 시간은 $(x+2)$시간이다.

전체 일의 양을 1이라고 하면 두 사람이 1시간 동안 할 수 있는 일의 양은 각각 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+2}$이므로 두 사람이 함께 일할 때 1시간 동안 할 수 있는 일의 양은

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2} \qquad \cdots\cdots ①$$

두 사람이 함께 컴퓨터를 조립하면 1시간 20분, 즉 $\frac{4}{3}$시간이 걸리므로 1시간 동안 할 수 있는 일의 양은

$$\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots ②$$

①과 ②에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{3}{4}$이므로 이 방정식을 풀면

$$x=-\frac{4}{3} \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $x>0$이므로 $x=2$이고, 이 근은 위의 분수방정식의 분모를 0이 되게 하지 않으므로 근이다.

따라서 민지가 혼자 컴퓨터를 조립하는 데 걸리는 시간은 2시간이다. □

미지수에 대한 무리식을 포함하는 방정식을 **무리방정식**이라고 부른다.

무리방정식의 풀이

무리방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.

① 무리방정식을 적당히 이항한 다음 양변을 제곱한 다항식으로만 이루어진 방정식으로 고친다.

② ①에서 얻은 방정식을 푼다.

③ ②에서 얻은 근 중에서 무연근을 제외한 나머지를 근으로 한다.

참고 무리방정식을 다항방정식으로 바꾸어 풀어 얻은 근 중에서 본래 무리방정식의 근이 되지 않는 것을 **무연근**이라고 부른다.

예제 44. 다음 무리방정식을 풀어라.

$$\sqrt{2-x}+x+4=0$$

풀이 주어진 무리방정식을 변형하면 $\sqrt{2-x}=-x-4$이다. 양변을 제곱하면 $2-x=x^2+8x+16$이다. 이 식을 정리하여 풀면 $x=-7$ 또는 $x=-2$이다.

(i) $x=-7$을 주어진 방정식에 대입하면 (좌변)$=0$, (우변)$=0$이므로 $x=-7$은 근이다.

(ii) $x=-2$를 주어진 방정식에 대입하면 (좌변)$=4$, (우변)$=0$이므로 $x=-2$는 무연근이다.

따라서 구하는 근은 $x=-7$이다. □

예제 45. 다음 무리방정식을 풀어라.

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=1$$

풀이 주어진 방정식을 변형하면 $\sqrt{x+2}-1=\sqrt{3-x}$이고 양변을 제곱하고 정리하면 $x=\sqrt{x+2}$이다. 다시 양변을 제곱하고 정리하여 풀면 $x^2-x-2=0$ 즉 $x=-1$ 또는 $x=2$이다.

(i) $x=-1$을 방정식에 대입하면 (좌변)$=-1$, (우변)$=1$이므로 $x=-1$은 무연근이다.

(ii) $x=2$를 주어진 방정식에 대입하면 (좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 $x=2$는 근이다.

따라서 구하는 근은 $x=2$이다. □

예제 **46.** 다음 무리방정식을 풀어라.

$$x^2-x-\sqrt{x^2-x-2}=4$$

풀이 $\sqrt{x^2-x-2}=X$로 놓으면 $x^2-x=X^2+2$이므로 주어진 방정식은 $X^2-X-2=0$이고 이것을 풀면 $X=2$ 또는 $X=-1$이다. 그런데 $X\geq 0$이므로 $X=2$이다. 따라서

$$\sqrt{x^2-x-2}=2$$

의 양변을 제곱하여 풀면 $x=-2$ 또는 $x=3$이다. 이들은 모두 주어진 방정식을 만족시킨다. 따라서 구하는 근은 $x=-2$ 또는 $x=3$이다. □

9 연립방정식

두 개 이상의 방정식을 묶어놓은 것을 **연립방정식**이라고 부른다. 연립일차방정식은 가감법이나 대입법을 이용하여 풀 수 있다.

- **가감법** : 두 식을 변변 더하거나 빼서 미지수를 소거하는 방법
- **대입법** : 한 식을 한 문자에 대하여 푼 뒤 다른 식에 대입하여 푸는 방법

연립방정식의 풀이

(1) 연립일차방정식은 가감법과 대입법을 이용하여 미지수를 하나씩 소거해가며 풀어낸다.

(2) 연립이차방정식은 적절히 인수분해하여 연립일차방정식으로 바꾸어 푼다.

연립이차방정식 유형 1 일차식과 이차식이 연립되어 있는 경우

$$\begin{cases}(\text{일차식})=0\\(\text{이차식})=0\end{cases}$$

일차식을 한 문자에 대하여 푼 뒤 이차식에 대입하여 두 쌍의 해를 구한다.

예제 **47.** 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases}x-2y=1\\x^2-y^2=8\end{cases}$$

풀이 일차방정식을 변형하면 $x=2y+1$이다. 이 식을 이차방정식에 대입하면 $(2y+1)^2-y^2=8$을 얻는다. 이 이차방정식을 풀면

$$y=-\frac{7}{3} \text{ 또는 } y=1$$

이다. 각각의 경우를 일차식 $x-2y=1$에 대입하여 x를 구하면

$$\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}x=-\dfrac{11}{3}\\y=-\dfrac{7}{3}\end{cases}$$

을 얻는다. □

연립이차방정식 유형 2 이차식과 이차식이 연립되어 있고, 한 식이 상수항이 0인 경우

$$\begin{cases}(\text{이차식 }1)=0 & \cdots ㉠\\(\text{이차식 }2)=k & \cdots ㉡\end{cases}$$

두 식 중 상수항이 0인 것(예를 들면 위 식에서 ㉠이라고 하자)의 좌변을 인수분해하여 아래와 같이 두 일차방정식 ㉢, ㉣로 만든다.

$$\begin{cases}(\text{일차식 }1)=0 & \cdots ㉢\\(\text{이차식 }2)=k & \cdots ㉡\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\text{일차식 }2)=0 & \cdots ㉣\\(\text{이차식 }2)=k & \cdots ㉡\end{cases}$$

앞의 ①의 방법을 이용하여 각각 두 쌍의 해를 구한다. 즉 전체 네 쌍의 해를 구한다.

예제 **48.** 다음 연립방정식 의 해를 구하여라.

$$\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=0\\5x^2-y^2=4\end{cases}$$

풀이 첫 번째 이차방정식의 좌변을 인수분해하면

$$\begin{cases}(2x-y)(x-y)=0\\5x^2-y^2=4\end{cases}$$

이다. 따라서 주어진 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases}2x-y=0\\5x^2-y^2=4\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}x-y=0\\5x^2-y^2=4\end{cases}$$

각각의 방정식을 풀면

$$\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}x=-2\\y=-4\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}.$$

□

연립이차방정식 유형 3 이차식과 이차식이 연립되어 있고, 두 식 모두 상수항이 0이 아닌 경우

$$\begin{cases}(\text{이차식 }1)=k_1 & \cdots ㉠\\(\text{이차식 }2)=k_2 & \cdots ㉡\end{cases}$$

두 이차방정식이 양변에 적절한 수를 곱하여 더하거나 빼면 상수항이 0인 이차방정식 ㉢이 만들어진다.

$$\begin{cases}(\text{이차식 }3)=0 & \cdots ㉢\\(\text{이차식 }2)=k_2 & \cdots ㉡\end{cases}$$

그것을 ㉠ 또는 ㉡과 연립하여 ②와 같은 방법으로 풀면 네 쌍의 해를 구할 수 있다.

예제 **49.** 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases}x^2-2xy+2y^2=5\\4x^2-11xy+7y^2=10\end{cases}$$

풀이 첫 번째 식에 -2를 곱하여 두 번째 식과 더하면

$$2x^2-7xy+3y^2=0$$

이다. 이 식의 좌변을 인수분해하면

$$(2x-y)(x-3y)=0$$

이므로

$$2x-y=0 \text{ 또는 } x-3y=0$$

을 얻는다. 처음 문제에서 주어진 이차방정식 중 하나와 위의 두 일차방정식을 연립하여 풀면 해를 구할 수 있다. □

10 부등식

등식에서 등호 대신 부등호가 있는 식을 **부등식**이라고 부른다. 부등식에 미지수 x가 있을 때, 부등식이 참이 되게 하는 x의 범위를 **부등식의 해**라고 부른다.

부등식의 해를 구할 때에는 주어진 부등식을

$$x<(\text{수}),\ x>(\text{수}),\ x\le(\text{수}),\ x\ge(\text{수})$$

중 하나의 모양으로 변형하여 구한다.

부등식의 성질

(1) 부등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에서 같은 수를 빼어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

(2) 부등식의 양변에 같은 양수를 곱하거나 양변을 같은 양수로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

(3) 부등식의 양변에 같은 음수를 곱하거나 양변을 같은 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

예제 50. 다음 부등식을 풀어라.

(1) $4x-2>0$ (2) $x>2x+6$

풀이 (1) 양변에 2를 더하면 $4x>2$이다. 이 식의 양변을 2로 나누면 $x>2$를 얻는다.

(2) 양변에서 $2x$를 빼면 $-x>6$이다. 이 식의 양변에 -1을 곱하면 $x<-6$을 얻는다. □

절댓값이 포함된 부등식

절댓값이 있는 부등식은, 절댓값 안의 식이 0이 되는 점을 기준으로 구간을 나누어 푼 뒤, 각각의 해를 합집합한다.

예제 51. 부등식 $|x|+|x-5|\ge 9$의 해를 구하여라.

풀이 (i) $x<0$일 때 $-x-x+5\ge 9$에서 $x\le -2$이다.

(ii) $0\le x<5$일 때 $x-x+5\ge 9$이므로 해가 없다.

(iii) $x\ge 5$일 때 $x+x-5\ge 9$에서 $x\ge 7$이다.

따라서 구하는 해는 $x\le -2$ 또는 $x\ge 7$이다. □

예제 52. 부등식 $|3x-2|>|2x-5|$의 해를 구하여라.

풀이 (i) $x<\frac{2}{3}$일 때 $-3x+2>-2x+5$에서 $x<-3$이다.

(ii) $\frac{2}{3}\le x<\frac{5}{2}$일 때 $3x-2>-2x+5$에서 $x>\frac{7}{5}$이다.

그런데 범위가 $\frac{2}{3}\le x<\frac{5}{2}$이므로 $\frac{7}{5}<x<\frac{5}{2}$이다.

(iii) $x\ge\frac{5}{2}$일 때 $3x-2>2x-5$에서 $x>-3$이다.

그런데 범위가 $x\ge\frac{5}{2}$이므로 $x\ge\frac{5}{2}$이다.

세 범위를 합집합하면 $x<-3$ 또는 $x>\frac{7}{5}$이다. □

이차부등식의 풀이 ($D>0$인 경우)

$D>0$이고 $a>0$일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가지면 (단, $\alpha<\beta$)

- $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$.
- $ax^2+bx+c\ge 0$의 해는 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$.
- $ax^2+bx+c<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$.
- $ax^2+bx+c\le 0$의 해는 $\alpha\le x\le\beta$.

예제 53. 다음 부등식의 해를 구하여라.

(1) $x^2-x-6>0$ (2) $x^2-x-6\ge 0$

(3) $x^2-x-6<0$ (4) $x^2-x-6\le 0$

풀이 방정식 $x^2-x-6=0$은 두 실근 -2, 3을 가진다.

(1) $x<-2$ 또는 $x>3$ (2) $x\le -2$ 또는 $x\ge 3$

(3) $-2<x<3$ (4) $-2\le x\le 3$ □

이차부등식의 풀이 ($D=0$인 경우)

$D=0$이고 $a>0$일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근 α를 가지면

- $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x\ne\alpha$인 모든 실수.
- $ax^2+bx+c\ge 0$의 해는 모든 실수.
- $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.
- $ax^2+bx+c\le 0$의 해는 $x=\alpha$.

예제 54. 다음 부등식의 해를 구하여라.

(1) $x^2-4x+4>0$ (2) $x^2-4x+4\ge 0$

(3) $x^2-4x+4<0$ (4) $x^2-4x+4\le 0$

풀이 방정식 $x^2-4x+4=0$은 중근 2를 가진다.

(1) $x\ne 2$인 모든 실수 (2) 모든 실수

(3) 해가 없다 (4) $x=2$ □

이차부등식의 풀이 ($D<0$인 경우)

$a>0$일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 허근을 가지면

- $ax^2+bx+c>0$의 해는 모든 실수.
- $ax^2+bx+c\ge 0$의 해는 모든 실수.
- $ax^2+bx+c<0$의 해는 없다.
- $ax^2+bx+c\le 0$의 해는 없다.

예제 55. 다음 부등식의 해를 구하여라.

(1) $x^2-6x+10>0$ (2) $x^2-6x+10\ge 0$

(3) $x^2-6x+10<0$ (4) $x^2-6x+10\le 0$

풀이 방정식 $x^2-6x+10=0$은 실근을 갖지 않는다.

(1) 모든 실수 (2) 모든 실수

(3) 해는 없다 (4) 해는 없다 □

이차부등식을 풀 때 이차항의 계수가 음수이면 양변에 -1을 곱한 뒤 풀면 편하다.

예제 56. 부등식 $-x^2+x-1 \geq 0$을 풀어라.

풀이 주어진 부등식은 변형하면 $x^2-x+1 \leq 0$이다. 좌변의 판별식이 음수이므로 주어진 부등식은 해를 갖지 않는다. □

두 개 이상의 부등식을 묶어놓은 것을 **연립부등식**이라고 부른다. 묶여있는 각각의 부등식을 풀어 해를 수직선에 나타내었을 때 겹치는 부분이 연립부등식의 해가 된다.

> **연립부등식의 풀이**
> 연립부등식은 각각의 부등식을 푼 뒤 해를 교집합 해준다.

예제 57. 다음 연립부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2+x+10 \leq 8x \\ x^2 > 7x-12 \end{cases}$ (2) $3 < x(x-2) \leq 8$

풀이 (1) 각 부등식을 풀자.

$x^2+x+10 \leq 8x$를 풀면 $2 \leq x \leq 5$이다.

$x^2 > 7x-12$를 풀면 $x < 3$ 또는 $x > 4$이다.

두 영역을 교집합하면 $2 \leq x < 3$ 또는 $4 < x \leq 5$이다.

(2) 주어진 부등식을 변형하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} 3 < x(x-2) \\ x(x-2) \leq 8 \end{cases}$$

연립된 각 부등식을 풀자.

$3 < x(x-2)$를 풀면 $x < -1$ 또는 $x > 3$이다.

$x(x-2) \leq 8$을 풀면 $-2 \leq x \leq 4$이다.

두 영역을 교집합하면 $-2 \leq x < -3$ 또는 $3 < x \leq 4$이다. □

예제 58. 이차부등식 $x^2+(a-2)x+a+1 \geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 a의 값을 정하여라.

헤설 좌변의 판별식이 0 이하가 되도록 해준다. □

부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여

$$f(x) > 0,\ f(x) < 0,\ f(x) \geq 0,\ f(x) \leq 0$$

중 하나의 꼴로 정리하였을 때, $f(x)$가 삼차식이면 그 부등식을 **삼차부등식**이라고 부르며, $f(x)$가 사차식이면 그 부등식을 **사차부등식**이라고 부른다. 삼차 이상의 부등식을 **고차부등식**이라고 부른다.

> **고차부등식의 풀이**
> ① 모든 항을 좌변으로 이항하여
> $$f(x) > 0,\ f(x) < 0,\ f(x) \geq 0,\ f(x) \leq 0$$
> 의 꼴로 고친다.
> ② $f(x)$를 계수가 실수인 범위에서 인수분해하여 방정식 $f(x)=0$의 해를 구한다.
> ③ 방정식 $f(x)=0$의 해를 경계로 하는 x의 값의 범위에서 $f(x)$의 부호를 조사하여 주어진 부등식의 해를 구한다.

예제 59. 다음 부등식을 풀어라.

(1) $x^3-4x^2+x+6 > 0$ (2) $x^3+2x^2-x-2 \leq 0$

풀이 (1) $f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라고 하면

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$$

방정식 $f(x)=0$의 해 $x=-1$, $x=2$, $x=3$을 경계로 하는 x의 값의 범위에서 $f(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<2$	$x=2$	$2<x<3$	$x=3$	$x>3$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

위의 표에서 부등식 $f(x) > 0$의 해는

$$-1 < x < 2 \text{ 또는 } x > 3.$$ □

(2) $f(x)=x^3+2x^2-x-2$라고 하면

$$f(x)=(x+2)(x+1)(x-1)$$

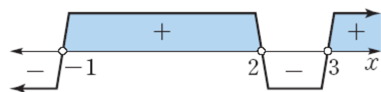
방정식 $f(x)=0$의 해 $x=-2$, $x=-1$, $x=1$을 경계로 하는 x의 값의 범위에서 $f(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$x>1$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

위의 표에서 부등식 $f(x) \leq 0$의 해는

$$x \leq -2 \text{ 또는 } -1 \leq x \leq 1$$ □

참고 고차부등식을 풀 때 표 대신 수직선을 이용하면 편리하다. 예를 들어 부등식 $(x+1)(x-2)(x-3) > 0$을 풀 때, 방정식 $(x+1)(x-2)(x-3)=0$의 해를 수직선 위에 나타내고 이들을 경계로 하는 각 x의 값의 범위에서 $(x+1)(x-2)(x-3)$의 부호를 조사한다.



예제 60. 다음 부등식을 풀어라.

(1) $x^4-3x \leq x^2-3x^3$ (2) $x^4-3x^2-2x > 0$

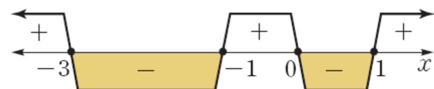
풀이 (1) 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$x^4+3x^3-x^2-3x \leq 0$$

이다. $f(x)=x^4+3x^3-x^2-3x$라고 하면

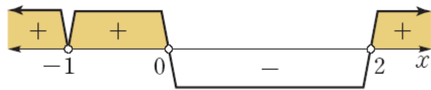
$$f(x)=x(x-1)(x+1)(x+3)$$

방정식 $f(x)=0$의 해 $x=-3$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$을 경계로 하여 수직선 위에서 $f(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.



따라서 구하는 해는 $-3 \leq x \leq -1$ 또는 $0 \leq x \leq 1$이다.

(2) $f(x)=x^4-3x^2-2x$라고 하면 $f(x)=x(x-2)(x+1)^2$이다. 방정식 $f(x)=0$의 해 $x=-1$, $x=0$, $x=2$를 경계로 하여 수직선 위에서 $f(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.



따라서 해는 $x<-1$ 또는 $-1<x<0$ 또는 $x>2$이다. □

예제 61. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^4+3x^2-4>0 & \cdots\cdots ① \\ x^3-9x\geq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 ①의 양변을 인수분해하면 $(x-1)(x+1)(x^2+4)>0$이다. 그런데 $x^2+4>0$이므로

$$(x-1)(x+1)(x^2+4)>0 \iff (x-1)(x+1)>0$$

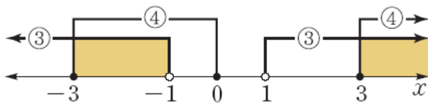
따라서

$$x<-1 \text{ 또는 } x>1 \qquad \cdots\cdots ③$$

을 얻는다. 한편 ②를 풀면

$$-3\leq x\leq 0 \text{ 또는 } x\geq 3 \qquad \cdots\cdots ④$$

이다. ③, ④를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



따라서 해는 $-3\leq x<-1$ 또는 $x\geq 3$이다. □

미지수에 대한 유리식으로만 이루어진 부등식을 **유리부등식**이라고 부른다. 또한 미지수에 대한 분수식을 포함하는 유리부등식을 **분수부등식**이라고 부른다.

분수부등식의 풀이

① 분수부등식을 정리하여 다음과 같은 꼴로 만든다.

$$\frac{A(x)}{B(x)}>0,\quad \frac{A(x)}{B(x)}\geq 0$$

② 부등식의 양변에 $\{B(x)\}^2$을 곱하고 $B(x)=0$인 x의 값은 제외한다.

$$\frac{A(x)}{B(x)}>0 \iff A(x)B(x)>0$$

$$\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0 \iff A(x)B(x)\geq 0\text{이고 } B(x)\neq 0$$

③ ②에서 얻은 부등식을 푼다.

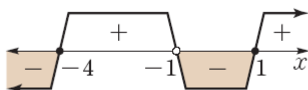
예제 62. 분수부등식 $x+2\leq \dfrac{6}{x+1}$을 풀어라.

풀이 주어진 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$x+2-\frac{6}{x+1}=\frac{(x+2)(x+1)-6}{x+1}=\frac{(x+4)(x-1)}{x+1}\leq 0$$

양변에 $(x+1)^2$을 곱하면

$$(x+4)(x-1)(x+1)\leq 0\text{이고 } x\neq -1.$$



따라서 부등식의 해는 $x\leq -4$ 또는 $-1<x\leq 1$. □

예제 63. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$1\leq \frac{x}{x+2}<2$$

풀이 주어진 연립부등식의 해는 두 부등식

$$1\leq \frac{x}{x+2} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{x}{x+2}<2 \qquad \cdots\cdots ②$$

를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위이다. ①에서

$$1-\frac{x}{x+2}=\frac{2}{x+2}\leq 0$$

양변에 $(x+2)^2$을 곱하면 $2(x+2)\leq 0$이고 $x\neq -2$이다. 따라서 $x<-2$이다. 다음으로 ②에서

$$\frac{x}{x+2}-2=\frac{-(x+4)}{x+2}<0$$

양변에 $(x+2)^2$을 곱하여 정리하면 $(x+4)(x+2)>0$이므로

$$\therefore\ x<-4 \text{ 또는 } x>-2$$

따라서 ①과 ②를 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는 $x<-4$이다. □

범위 내의 어떠한 값을 넣어도 성립하는 부등식을 **절대부등식**이라고 부른다.

부등식의 증명을 위한 실수의 성질 부등식의 증명에 사용되는 실수의 성질은 다음과 같은 것들이 있다.

(1) $a>b \iff a-b>0$

(2) $a^2\geq 0$, $a^2+b^2\geq 0$

(3) $a^2+b^2=0 \iff a=0,\ b=0$

(4) $|a|^2=a^2$, $|ab|=|a|\,|b|$

(5) 양수 a, b에 대하여 $a>b \iff a^2>b^2$

참고 절대부등식은 해를 구하는 것이 아니라 부등식이 성립함을 증명해야 한다. 또한 등호가 들어 있는 절대부등식을 증명할 때에는 언제 등호가 성립하는지를 써주어야 한다. □

예제 **64.** 다음 부등식을 증명하여라.

(1) 양수 a, b에 대하여 $\dfrac{a+b}{2}\geq \sqrt{ab}$ (산술-기하평균)

(2) 양수 a, b에 대하여 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2$

(3) $|a+b|\leq |a|+|b|$ (삼각부등식)

(4) $|a|-|b|\leq |a-b|$

(5) $(ax+by)^2\leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ (코시-슈바르츠)

(6) $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$

풀이 (1) (좌변)−(우변)$=\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0$.

등호는 $a=b$일 때 성립한다.

다른 방법 양변을 제곱하여 비교한다.

(2) (좌변)−(우변)$=\dfrac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$. 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

(3) 양변이 모두 0 이상이므로 제곱하여 비교하면 된다.

$$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=2(|ab|-ab)$$

그런데 $|ab| \geq ab$이므로 이 부등식은 참이다. 단, 등호는 $ab \geq 0$일 때 성립한다.

(4) 삼각부등식에 의하여

$$|a|=|(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|$$

이므로 양변에서 $|b|$를 빼면 $|a|-|b| \leq |a-b|$를 얻는다. 단, 등호는 $a=b$ 또는 $b=0$일 때 성립한다.

다른 방법 양변을 제곱하여 비교한다.

(5) (우변)$-$(좌변)$=(ay-bx)^2 \geq 0$. 단, 등호는 $ay=bx$일 때 성립한다.

(6) (우변)$-$(좌변)$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$.

단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다. □

11 행렬

2009 개정 교육과정에서 행렬은 고급수학 과정으로 올라갔으며 정규교육과정에서는 제외되었다.

몇 개의 수 또는 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶어 나타낸 것을 **행렬**이라고 부르며, 행렬을 이루는 각각의 수 또는 문자를 그 행렬의 **성분**이라고 부른다. 이때 제 i행과 제 j열이 만나는 위치에 있는 성분을 **(i, j) 성분**이라고 부르며 기호로 a_{ij}와 같이 나타낸다.

m개의 행과 n개의 열로 이루어진 행렬을 **$m \times n$ 행렬**이라고 부르며 특히 $n \times n$ 행렬을 **n차 정사각행렬**이라고 부른다.

예제 65. 2×3 행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}가 $a_{ij}=i-2j+2$일 때, 행렬 A를 구하여라.

풀이 2×3 행렬이므로 $i=1, 2$이고 $j=1, 2, 3$을 대입하여 a_{ij}를 구한다. 따라서

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$ □

행렬의 합과 곱 두 행렬

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

(2) $kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$ (k는 실수)

(3) $AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

예제 66. 다음 등식

$$\begin{pmatrix} 2-a & 3 \\ -1 & b+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & c+1 \\ c+3d & 2 \end{pmatrix}$$

가 성립하도록 상수 a, b, c, d의 값을 구하여라.

풀이 두 행렬의 대응하는 성분이 각각 같아야 하므로

$$2-a=0,\ c+1=3,\ c+3d=-1,\ b+1=2$$

이다. 이것을 풀면 $a=2, b=1, c=2, d=-1$이다. □

예제 67. 다음을 계산하여라.

(1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ □

예제 68. 다음을 계산하여라.

(1) $(2\ \ -3)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

풀이 (1) $(8\ \ -9)$ (2) $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ □

모든 성분이 0인 행렬을 **영행렬**이라고 부르고 O로 나타낸다. 또한 대각선 성분만 1이고 다른 성분이 0인 정사각행렬을 **단위행렬**이라고 부르고 E로 나타낸다.

행렬의 합의 성질 같은 꼴의 행렬 A, B, C와 실수 k, h에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $(k+h)A=kA+hA,\ k(A+B)=kA+kB$

(4) $A+O=O+A=A$

(5) $A+(-A)=(-A)+A=O$

예제 69. 다음 등식을 만족시키는 행렬 X를 구하여라.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

풀이 $X=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ □

예제 70. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

풀이 주어진 등식의 좌변을 계산하면

$$\begin{pmatrix} 4x & 2x+y \\ -4 & -2+3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

이다. 각 성분을 비교하면

$$4x=8,\ 2x+y=5,\ -2+3y=1$$

이고 이것을 연립하여 풀면 $x=2, y=1$이다. □

행렬의 곱의 성질 합과 곱이 정의되는 행렬 A, B, C와 실수 k에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(AB)C=A(BC)$

(2) $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

(3) $(kA)B=k(AB)=A(kB)$

(4) $AE=EA=A$

(5) $A^n=\underbrace{AAA\cdots A}_{n\text{ 개}}$, $A^mA^n=A^{m+n}$, $(A^m)^n=A^{mn}$

참고 영행렬은 행렬의 덧셈의 항등원 역할을 한다. 단위행렬은 행렬의 곱셈의 항등원 역할을 한다. 행렬 A에 대하여 $-A$는 A의 덧셈에 대한 역원이다.

행렬 A의 곱셈에 대한 역원을 A의 역행렬이라고 부르고 A^{-1}로 나타낸다. 이 내용은 뒤에 나온다.

예제 71. 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E$$

를 구하여라.

풀이 직접 계산해보면 영행렬 O가 나온다. 이와 같은 공식을 **케일리-해밀턴의 정리**라고 부른다. □

예제 72. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ y & 4 \end{pmatrix}$에 대하여

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

이 성립할 때, 실수 x, y의 값을 구하여라.

풀이 좌변의 행렬을 직접 계산할 수도 있지만 여기서는 다른 방법을 사용하자.

$$(\text{좌변})=(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2$$

이므로 이것을 우변과 비교하면 $BA-AB=O$를 얻는다. 즉

$$AB=BA$$

이다. 따라서

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ y & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ y & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{pmatrix} xy & 4+4x \\ 3y & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ y+4 & xy+12 \end{pmatrix}$$

이다. 두 행렬의 성분을 비교하면

$$xy=4,\ 4+4x=12,\ 3y=y+4,\ 16=xy+12$$

이므로 이것을 풀면 $x=2$, $y=2$이다. □

행렬의 곱셈과 실수의 곱셈의 차이점

(1) 행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않는다.

(2) $AB=O$이지만 $A\neq O$이고 $B\neq O$일 수도 있다.

(3) $AB=AC$이지만 $B\neq C$일 수도 있다.

예제 73. 이차정사각행렬 A, B와 같은 꼴의 영행렬 O에 대하여 다음이 항상 성립하는지 판별하여라.

(1) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

(2) $(AB)^2=A^2B^2$

(3) $A^2=O$이면 $A=O$

(4) $A^2=O$이면 $A^3=O$

(5) $AB=O$이면 $A=O$ 또는 $B=O$

풀이 두 행렬 A, B가

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

로 주어지면 (1), (2)는 성립하지 않는다. 한편

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

일 때 (3)은 성립하지 않는다. 또한

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

일 때 (5)는 성립하지 않는다.

이제 (4)가 성립함을 보이자. $A^2=O$일 때 양변에 A를 곱하면

$$(\text{좌변})=A^2A=A^3,\ (\text{우변})=OA=O$$

이므로 $A^3=O$가 성립한다. □

예제 74. 단위행렬 E에 대하여 다음을 구하여라.

(1) E^{10} (2) $E^{50}+(-E)^{50}$

풀이 (1) $E^{10}=E$ (2) $E^{50}+(-E)^{50}=E+E=2E$ □

정사각행렬 A와 단위행렬 E에 대하여 $AX=XA=E$를 만족시키는 행렬 X가 존재할 때, X를 A의 **역행렬**이라고 부르고 기호로 $\boldsymbol{A^{-1}}$로 나타낸다. 즉

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

이다.

역행렬 공식

이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여

(1) $ad-bc\neq 0$이면 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(2) $ad-bc=0$이면 A의 역행렬이 존재하지 않는다. 이때 $ad-bc$를 A의 **행렬식**이라고 부른다.

역행렬 공식의 유도 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라고 하고

$$AB=E$$

라고 하면

$$ap+br=1,\ aq+bs=0,\ cp+dr=0,\ cq+ds=1$$

을 얻는다. 이것을 연립하여 풀면

$$p=\frac{d}{ad-bc},\ q=-\frac{b}{ad-bc},\ r=-\frac{c}{ad-bc},\ s=\frac{a}{ad-bc}$$

를 얻는다. 이렇게 얻어진 행렬 B에 대하여 BA를 계산하여도 마찬가지로 $BA=E$를 얻는다. ■

예제 75. 다음 행렬 A, B의 역행렬을 각각 구하여라.

(1) $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix}-3 & 6 \\ 2 & -4\end{pmatrix}$

풀이 (1) (행렬식)$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\neq 0$이므로 역행렬이 존재한다. 역행렬을 구하면

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$$

이다.

(2) (행렬식)$=(-3)(-4)-6\times 2=0$이므로 B의 역행렬은 존재하지 않는다. □

예제 76. 행렬 $\begin{pmatrix}a & 2 \\ 1 & a-1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않도록 a의 값을 정하여라.

풀이 (행렬식)$=a(a-1)-2=0$이어야 하므로

$$a^2-a-2=0$$

이어야 한다. 이 방정식을 풀면 $a=-1$ 또는 $a=2$를 얻는다. □

> **역행렬의 성질**
> 정사각행렬 A, B의 역행렬이 존재할 때 다음이 성립한다.
> (1) $(A^{-1})^{-1}=A$
> (2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
> (3) $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$
> (4) $k\neq 0$인 실수일 때 $(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$

증명 (2) 행렬의 곱셈의 결합법칙에 의하여

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$$

이고 마찬가지로 $(B^{-1}A^{-1})(AB)=E$이므로 $B^{-1}A^{-1}$는 AB의 역행렬이다. 즉 $B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$이다.

(1) 위의 (2)에 의하여

$$(A^{-1})^{-1}A^{-1}=(A^{-1}A)^{-1}=E^{-1}=E=AA^{-1}$$

이다. 즉 $(A^{-1})^{-1}A^{-1}=AA^{-1}$이고 양변의 오른쪽에 A를 곱하면 $(A^{-1})^{-1}=A$를 얻는다.

(3) 수학적 귀납법으로 증명하자.

$n=1$일 때에는 당연히 $(A^n)^{-1}=A^{-1}=(A^{-1})^n$이므로 성립한다. 이제 $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$$(A^{k+1})^{-1}=(A^kA)^{-1}=A^{-1}(A^k)^{-1}=A^{-1}(A^{-1})^k=(A^{-1})^{k+1}$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 성립한다. ■

예제 77. 정사각행렬 A의 역행렬이 존재하고 k가 0이 아닌 실수일 때 $(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$가 성립함을 증명하여라.

풀이 행렬의 실수배는 곱하는 순서를 바꾸어도 되므로 다음 등식이 성립한다.

$$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)=\left(k\cdot\frac{1}{k}\right)AA^{-1}=1E=E,$$
$$\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)(kA)=\left(\frac{1}{k}\cdot k\right)A^{-1}A=1E=E.$$

따라서 $\frac{1}{k}A^{-1}$은 kA의 역행렬이다. □

> **행렬방정식의 풀이**
> 행렬 A의 역행렬 A^{-1}가 존재할 때 다음이 성립한다.
> (1) $AX=B \iff X=A^{-1}B$
> (2) $XA=B \iff X=BA^{-1}$

예제 78. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 1 & 3\end{pmatrix}$에 대하여 다음 등식을 만족시키는 행렬 X를 구하여라.

(1) $AX=B$　　(2) $XA=B$

풀이 먼저 A의 역행렬을 구하면 $A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2 \\ -2 & 1\end{pmatrix}$이다.

(1) $AX=B$의 양변의 왼쪽에 A^{-1}을 곱하면

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

이므로

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}5 & -2 \\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -6 \\ -3 & 3\end{pmatrix}$$

(2) $XA=B$의 양변의 오른쪽에 A^{-1}을 곱하면

$$XAA^{-1}=BA^{-1}$$

이므로

$$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2 \\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -4 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$$ □

> **연립일차방정식의 해**
> 미지수가 x, y인 연립일차방정식
> $$\begin{cases}ax+by=p \\ cx+dy=q\end{cases}$$
> 를 행렬을 이용하여 나타내면 다음과 같다.
> $$\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p \\ q\end{pmatrix}$$
> (1) $ad-bc\neq 0$이면 이 방정식은 한 쌍의 해를 가지며
> $$\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}p \\ q\end{pmatrix}$$
> (2) $ad-bc=0$일 때
> ① $a:c=b:d=p:q$이면 해가 무수히 많다.
> ② $a:c=b:d\neq p:q$이면 해가 없다.

예제 79. 역행렬을 이용하여 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases}3x-2y=8 \\ 2x-y=5\end{cases}$　(2) $\begin{cases}2x-y=3 \\ 6x-3y=9\end{cases}$　(3) $\begin{cases}x-2y=1 \\ -2x+4y=-3\end{cases}$

풀이 (1) 주어진 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타내면

$$\begin{pmatrix}3 & -2 \\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 \\ 5\end{pmatrix}$$

이다. 여기서 $\begin{pmatrix}3 & -2 \\ 2 & -1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하므로

$$\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 \\ 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}8 \\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 \\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 \\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 \\ -1\end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $x=2$, $y=-1$이다.

(2) 주어진 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타내면

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

이다. 여기서 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다. 이때

$$2 : 6 = -1 : 3 = 3 : 9$$

이므로 주어진 연립방정식의 해는 무수히 많다.

(3) 주어진 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타내면

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

이다. 여기서 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$의 역행렬은 존재하지 않는다. 이때

$$1 : -2 = -2 : 4 \neq 1 : -3$$

이므로 주어진 연립방정식의 해는 존재하지 않는다. □

예제 80. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} kx+2y=3x \\ 5x-4y=ky \end{cases}$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) 오직 한 쌍의 해를 갖기 위한 실수 k의 조건을 구하여라.
(2) $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖기 위한 실수 k의 값을 구하여라.

풀이 주어진 연립방정식에서 미지수가 있는 항을 모두 좌변으로 옮기면

$$\begin{cases} (k-3)x+2y=0 \\ 5x+(-4-k)y=0 \end{cases}$$

이다. 이것을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} k-3 & 2 \\ 5 & -4-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$$(\text{판별식})=(k-3)(-4-k)-2\cdot 5\neq 0$$

이어야 하므로 $k\neq -2$ 그리고 $k\neq 1$이 된다.

(2) $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면

$$(\text{판별식})=(k-3)(-4-k)-2\cdot 5=0$$

이어야 하므로 $k=-2$ 또는 $k=1$이 된다. □

고등학교 수학 요약노트

함수와 수열

Sooji Shin • soojishin@live.com

이 노트에서는 고등학교에서 배우는 수학의 내용 중 함수와 수열에 관련된 개념과 공식을 정리하고 그에 따른 예제와 풀이를 소개합니다. 필요한 경우 중학교 과정의 내용도 포함하고 있습니다. 이 노트에서 포함하고 있는 내용은 다음과 같습니다.

- 함수의 뜻과 성질
- 유리함수와 무리함수
- 삼각함수
- 지수함수와 로그함수
- 수열과 수열의 합

이 노트가 수학을 공부하는 분들께 도움이 되기를 바랍니다.

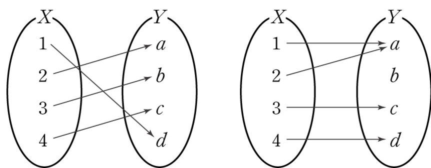
1 함수의 뜻

x의 값이 하나씩 정해질 때마다 y의 값도 하나씩 정해질 때, '**y는 x의 함수이다**'라고 말한다. 이 함수의 이름이 f이면, 이것을 기호로 $y=f(x)$로 나타낸다. 중학교 과정에서 공부하는 기본적인 함수는 다음과 같은 것들이 있다.

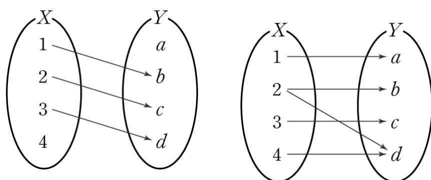
- **정비례** : x와 y 사이에 $y=ax$인 관계가 있을 때 $(a\neq 0)$
- **반비례** : x와 y 사이에 $y=\dfrac{a}{x}$인 관계가 있을 때 $(a\neq 0)$
- **일차함수** : $y=(x$에 대한 일차식$)$으로 나타낼 수 있을 때
- **이차함수** : $y=(x$에 대한 이차식$)$으로 나타낼 수 있을 때

함수의 뜻
두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 **함수**라고 부른다. X에서 Y로의 함수의 이름이 f일 때 이것을 $f:X\to Y$로 표기한다. 여기서 X를 f의 **정의역**, Y를 f의 **공역**이라고 부른다. 또한 함숫값들의 모임을 **치역**이라고 부른다.

예를 들어 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고 $Y=\{a,\ b,\ c,\ d\}$일 때 다음과 같은 두 대응은 함수이다.



그러나 다음 두 대응은 함수가 아니다.



앞에서와 같은 그림에서 X에서 Y로의 대응이 함수가 되려면 다음 두 조건을 모두 만족시켜야 한다.

(i) X의 원소 중에 대응 안 되는 것이 없어야 한다.
(ii) X의 원소 중에 두 개의 값에 대응되는 것이 없어야 한다.

2009 개정 교육과정에서 정의역, 공역, 치역의 개념은 중학교 과정에서 삭제되고 고등학교 과정에서만 다룬다.

예제 1. 정의역이 $X=\{1,\ 2,\ 4\}$이고 공역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)=x^2$의 치역을 구하여라.

풀이 $f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(4)=16$이므로 치역은 $\{1,\ 4,\ 16\}$이다. □

함수 $y=f(x)$의 정의역과 공역이 언급되지 않은 경우에는 $f(x)$가 정의되는 실수 x값 전체를 정의역으로 하고, 실수 전체 집합을 공역으로 생각한다.

예제 2. 다음 함수의 정의역과 치역을 구하여라.

(1) $y=|x|$　　　(2) $y=\dfrac{2}{x-1}+3$

풀이 (1) 모든 실수 x에 대하여 $|x|$를 구할 수 있으므로 정의역은 $\{x\,|\,x$는 실수$\}$이다. 한편 $|x|$의 값은 0 이상이므로 치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이다.

(2) 분모는 0이 될 수 없으므로 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 1\}$이다. 또한 분자가 0이 아닌 분수식은 0이 되지 않으므로 $\dfrac{2}{x-1}\neq 0$이다. 즉 $y=\dfrac{2}{x-1}+3\neq 3$이다. 따라서 치역은 $\{y\,|\,y\neq 3\}$이다. □

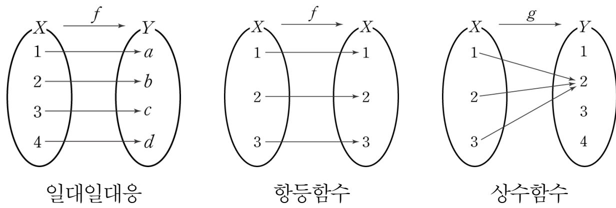
대응에 따른 함수의 구분
(1) 함수 $f:X\to Y$에서 X의 원소 x_1, x_2에 대하여
$$x_1\neq x_2\text{이면 } f(x_1)\neq f(x_2)$$
가 성립할 때, 이 함수 f를 **일대일 함수**라고 부른다.

(2) 함수 $f:X\to Y$가 일대일함수이고, 치역과 공역이 같으면 이 함수 f를 **일대일대응**이라고 부른다.

(3) 함수 $f:X\to X$에서 정의역 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x)=x$일 때, 이 함수 f를 X에서의 **항등함수**라고 부른다.

(4) 함수 $f:X\to Y$에서 정의역 X의 임의의 원소 x에 집합 Y의 단 하나의 원소 c만 대응할 때, 즉 X의 모든 원소의 함숫값이 같을 때, 이 함수 f를 **상수함수**라고 부른다.

보기 **3.** 다음은 각각 일대일대응, 항등함수, 상수함수의 예이다.



예제 **4.** 집합 $X=\{1, 2\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$에 대하여 다음에 답하여라.

(1) X에서 Y로의 함수는 몇 개인가?
(2) X에서 Y로의 함수 중 상수함수인 것은 몇 개인가?
(3) X에서 Y로의 함수 중 일대일함수인 것은 몇 개인가?
(4) X에서 Y로의 함수 중 일대일대응인 것은 몇 개인가?

풀이 (1) X의 원소의 개수가 2, Y의 원소의 개수가 3이므로 함수의 개수는 $3^2=9$개다.
(2) Y의 원소의 개수가 3이므로, 상수함수는 3개다.
(3) $f(1)$의 값으로 3개 중 하나를 택하고, $f(2)$의 값으로 남은 2개 중 하나를 택하면 되므로 일대일함수는 $3\times2=6$개다.
(4) X와 Y의 원소의 개수가 같지 않으므로 일대일대응은 존재하지 않는다. □

2 합성함수와 역함수

함수 $y=(x-1)^2$은 일차함수 $y=x-1$와 이차함수 $y=x^2$을 합쳐서 만든 것으로 생각할 수 있다. 이처럼 두 개의 함수를 합쳐서 만든 함수를 합성함수라고 부른다.

> **합성함수**
> 두 함수 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$의 합성함수는
> $$g\circ f: X\to Z,\quad (g\circ f)(x)=g(f(x))$$
> 으로 정의된 함수이다.

참고 (f의 치역) $\subset$ (g의 정의역)일 때에만 합성함수 $g\circ f$가 존재한다.

예제 **5.** 두 함수 $f(x)=3x-2$, $g(x)=x^2-1$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $f\circ g$ (2) $g\circ f$
(3) $f\circ f$ (4) $g\circ g$

풀이 (1) $f(g(x))=f(x^2-1)=3(x^2-1)-2=3x^2-5$.
(2) $g(f(x))=g(3x-2)=(3x-2)^2-1=9x^2-12x+3$.
(3) $f(f(x))=f(3x-2)=3(3x-2)-2=9x-8$.
(4) $g(g(x))=g(x^2-1)=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$. □

참고 위 예제를 통해 $f\circ g\neq g\circ f$임을 알 수 있다. 즉 일반적으로 함수의 합성의 교환법칙은 성립하지 않는다.

예제 **6.** $f(x)=2x$, $g(x)=x^2-1$, $h(x)=x+1$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $(f\circ g)\circ h$ (2) $f\circ(g\circ h)$

풀이 (1) $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=(f\circ g)(x+1)$
$=f(g(x+1))=f((x+1)^2-1)=f(x^2+2x)=2(x^2+2x)$
$=2x^2+4x$.
(2) $f\circ(g\circ h)(x)=f((g\circ h)(x))=f(g(h(x)))$
$=f(g(x+1))=f((x+1)^2-1)=f(x^2+2x)=2(x^2+2x)$
$=2x^2+4x$. □

참고 위 문제에서와 같이 일반적으로
$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$$
가 성립한다. 즉 함수의 합성의 결합법칙이 성립한다. 왜냐하면, h의 정의역의 임의의 원소 x에 대하여
$$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x)))$$
이고
$$(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))=f(g(h(x)))$$
이기 때문이다.

참고 합성함수에 관련된 다음과 같은 성질들이 있다.
(1) f와 g가 모두 일대일함수이면 $g\circ f$도 일대일함수이다.
(2) f와 g가 모두 일대일대응이면 $g\circ f$도 일대일대응이다.
(3) f와 g 중 하나라도 상수함수이면 $g\circ f$도 상수함수이다.
(4) f가 항등함수이면 $g\circ f=g$이고 $f\circ g=g$이다.
(5) f가 m차 함수이고 g가 n차 함수이면 $g\circ f$는 mn차 함수이다.

예제 **7.** $(f\circ f)(x)=4x+6$을 만족시키는 일차함수 $f(x)$를 모두 구하여라.

풀이 $f(x)=ax+b$라고 두면
$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)=a^2x+ab+b$$
이므로 $a^2=4$, $ab+b=6$이 되어야 한다.
즉 $a=2$이면 $b=2$이고, $a=-2$이면 $b=-6$이다. 따라서 구하는 일차함수는 $f(x)=2x+2$, $f(x)=-2x-6$이다. □

> **역함수**
> 함수 $y=f(x)$가 일대일대응일 때 f와는 반대 방향으로 y를 x에 대응시키는 함수를 f의 **역함수**라고 부르며 f^{-1}로 표기한다.

참고 역함수는 함수가 일대일대응일 때에만 존재한다. 또한 함수 f와 역함수 f^{-1}의 합성함수는 항등함수가 된다. □

예제 **8.** 정의역이 $\{x\,|\,1\le x\le 5\}$이고 공역이 $\{y\,|\,1\le y\le 9\}$인 함수 $y=2x-1$의 역함수를 구하여라.

풀이 $y=f(x)$의 역함수를 구할 때에는 x와 y를 바꾼 뒤 y에 대하여 풀면 된다.

주어진 함수의 x와 y를 바꾸면 $x=2y-1$이다. 이 식을 y에 대하여 풀면 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이다. □

참고 역함수를 구할 때 x와 y를 서로 바꾸므로, $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 서로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

예제 9. 등식 $f^{-1}(2)=1$, $f(f(1))=3$을 만족시키는 일차함수 f를 구하여라.

풀이 $f(x)=ax+b$라고 두고 문제에서 제시한 두 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한다. □

예제 10. 집합 $X=\{x \mid 0 \le x \le 3\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=ax+b$가 역함수를 갖도록 상수 a, b의 값을 정하여라.

해설 역함수를 가지려면 f가 일대일대응이 되어야 한다. 문제에서 주어진 함수 f는 일차함수이므로 그래프가 직선이다. 이때 일대일대응이 되려면

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(3)=3 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} f(0)=3 \\ f(3)=0 \end{cases}$$

이 되어야 한다. □

예제 11. 두 함수 $f(x)=x-1$, $g(x)=2x+4$에 대하여

$$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(5)$$

를 구하여라.

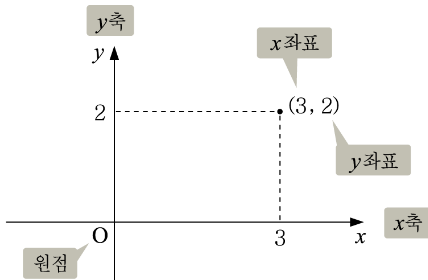
풀이 등식 $(g \circ f)^{-1}=f^{-1} \circ g^{-1}$과 $(f^{-1})^{-1}=f$를 이용한다.

$$\begin{aligned} f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f &= f \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ f \\ &= (f \circ f^{-1}) \circ (g^{-1} \circ f) = g^{-1} \circ f \end{aligned}$$

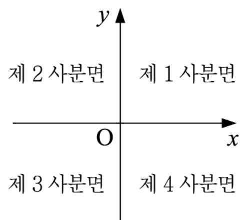
이다. 한편 $g^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-2$이므로 $g^{-1}(f(5))=g^{-1}(4)=0$.

3 함수의 그래프

두 수 a, b를 쌍으로 나타낸 (a, b)를 **순서쌍**이라고 부른다. 이 순서쌍은 x좌표가 a이고 y좌표가 b인 점을 나타낸다.



좌표평면의 가로축을 **x축**, 세로축을 **y축**이라고 부른다.



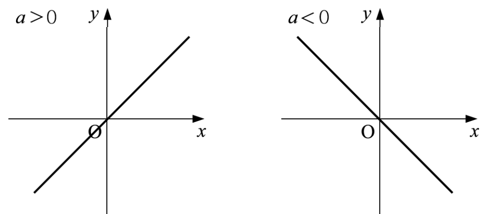
사분면	위치	좌표
제 1 사분면	오른쪽 위	(양수, 양수)
제 2 사분면	왼쪽 위	(음수, 양수)
제 3 사분면	왼쪽 아래	(음수, 음수)
제 4 사분면	오른쪽 아래	(양수, 음수)

따라서 좌표평면 위의 임의의 점은 네 개의 사분면 중 하나에 속하거나 또는 좌표축 위에 놓인다.

> **함수의 그래프**
> 함수 $f: X \to Y$의 그래프는 $y=f(x)$를 만족시키는 모든 순서쌍 (x, y)가 나타내는 점을 좌표평면에 나타낸 것이다. 즉 함수의 그래프는 집합 $\{(x, y) \mid y=f(x)\}$를 좌표평면에 나타낸 것이다.

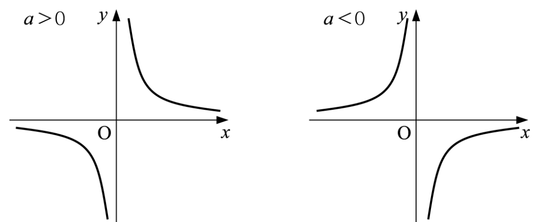
먼저 중학교 과정에서 공부하는 기본 함수의 그래프를 살펴보자. 정비례 $y=ax$의 그래프의 모양은 다음과 같다.

- 원점을 지나는 직선이다.
- a의 절댓값이 커질수록 가파른 그래프가 된다.
- $a>0$이면 제1사분면과 원점과 제3사분면을 지나고
  $a<0$이면 제2사분면과 원점과 제4사분면을 지난다.



반비례 $y=\frac{a}{x}$의 그래프의 모양은 다음과 같다.

- 원점에 대하여 대칭인 쌍곡선 모양이다.
- a의 절댓값이 커질수록 원점에서 멀어진다.
- $a>0$이면 제1사분면과 제3사분면을 지나고,
  $a<0$이면 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

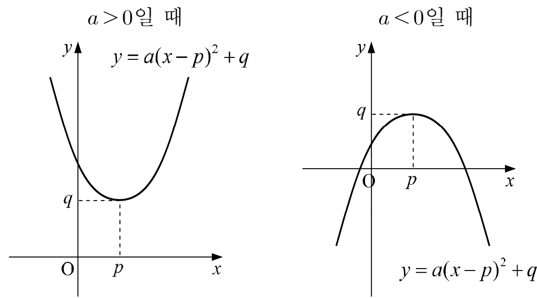


일차함수 $y=mx+n$의 그래프의 모양은 다음과 같다.

- 그래프의 모양이 직선이다. 이 때문에 $y=mx+n$ 또는 일차방정식 $ax+by+c=0$을 **직선의 방정식**이라고 부른다.
- m은 **기울기**가 된다.
- $m>0$이면 오른쪽 위를 향하고, $m<0$이면 오른쪽 아래를 향한다.
- $ax+by+c=0$의 그래프는 $y=mx+n$ 꼴로 바꾸어 생각한다.

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 모양은 다음과 같다.

- 꼭짓점이 (p, q)인 포물선 모양이다.
- $a>0$이면 아래로 볼록, $a<0$이면 위로 볼록하다.



- $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 모양이다.
- a의 절댓값이 클수록 그래프가 좁아진다.
- 축의 방정식은 $x=p$이다.
- $a>0$이면 $x=p$일 때 최솟값 q를 가진다.
  $a<0$이면 $x=p$일 때 최댓값 q를 가진다.

4 다항함수

함수 중에서 등식

$$y=(x\text{에 대한 다항식})$$

으로 나타낼 수 있는 함수를 **다항함수**라고 부른다. 이때 우변의 다항식의 차수에 따라 함수의 이름이 정해진다. 예를 들어

$$y=(x\text{에 대한 일차식})$$

으로 나타나는 함수를 **일차함수**라고 부르며

$$y=(x\text{에 대한 이차식})$$

으로 나타나는 함수를 **이차함수**라고 부른다.

이차함수의 최댓값과 최솟값

정의역이 $\{x \mid \alpha \le x \le \beta\}$인 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=p$일 때 최댓값이나 최솟값을 가진다. (단, p가 정의역의 원소가 아니면 $x=p$인 경우를 제외하고 생각해야 한다.)

예제 **12.** 정의역이 $\{x \mid 1 \le x \le 4\}$인 함수 $y=-x^2+4x+1$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이 $y=ax^2+bx+c$ 꼴의 함수는 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 바꾸어 생각하자.
먼저 $y=-x^2+4x+1$를 변형하면 $y=-(x-2)^2+5$이다. 정의역의 끝 점을 대입해보면 $x=1$일 때 함숫값은 4이고, $x=4$일 때 함숫값은 1이다. 또한 함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 5)$이고 $x=2$는 정의역의 원소이다. 따라서 4, 1, 5 중 가장 큰 값이 이 함수의 최댓값이고, 가장 작은 값이 이 함수의 최솟값이다. □

예제 **13.** 정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 2\}$인 함수 $y=2x^2-12x+3$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이 주어진 함수를 변형하면 $y=2(x-3)^2-15$이다. $x=-1$일 때 $y=17$, $x=2$일 때 $y=-13$이다. 꼭짓점의 좌표는 $(3, -15)$이지만 $x=3$이 정의역의 원소가 아니므로 정의역의 양 끝점에서의 함숫값만 생각하면 된다. 따라서 최댓값은 17, 최솟값은 -13이다. □

이차함수의 그래프와 직선의 위치관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치관계는 이 두 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식 D에 따라 다음과 같이 결정된다.

위치 관계	판별식
두 점에서 만난다	$D>0$
한 점에서 만난다	$D=0$
만나지 않는다	$D<0$

예제 **14.** 다음 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 조사하여라.
(1) $y=x^2+4x-8$, $y=6x-10$
(2) $y=-x^2+3x+1$, $y=x+2$
(3) $y=3x^2-5x-2$, $y=x+1$

풀이 연립하여 이차방정식의 판별식을 구한다.
(1) 연립하면 $x^2-2x+2=0$. 판별식은 $D<0$. 만나지 않는다.
(2) 연립하면 $x^2-2x+1=0$. 판별식은 $D=0$. 접한다.
(3) 연립하면 $x^2-2x-1=0$. 판별식은 $D>0$. 서로 다른 두 점에서 만난다. □

예제 **15.** 이차함수 $y=2x^2-2x-1$의 그래프와 직선 $y=-4x+5$가 만나는 두 점의 x좌표의 합을 구하여라.

풀이 연립하여 얻은 해가 교점의 좌표이다. 주어진 두 함수의 식을 연립하여 정리하면 $x^2+x-3=0$이다. 이 방정식의 두 근은 만나는 두 점의 x좌표와 같으므로 두 점의 x좌표의 합은 두 근의 합 -1이 된다. □

예제 **16.** 두 집합

$$A=\{(x, y) \mid y=2x^2-3x\},\ B=\{(x, y) \mid y=ax-2\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키도록 실수 a의 값을 정하여라.
(1) $n(A\cap B)=0$ (2) $n(A\cap B)=1$ (3) $n(A\cap B)=2$

풀이 $A\cap B$는 포물선 A와 직선 B의 교점의 집합이다.
두 집합의 조건으로 주어진 식을 연립하면

$$2x^2-(3+a)x+2=0$$

이다. 판별식을 구하면 $D=(a+7)(a-1)$이다.
(1) $D<0$이어야 하므로 $-7<a<1$이다.
(2) $D=0$이어야 하므로 $a=-7$ 또는 $a=1$이다.
(3) $D>0$이어야 하므로 $a<-7$ 또는 $a>1$이다. □

이차함수의 그래프와 x축의 위치관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 관계는 우변의 판별식의 부호에 따라 다음과 같이 정해진다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
x축과 만나는 점	두 점	한 점	없다
$a>0$일 때			
$a<0$일 때			

이때 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 된다.

예제 17. 이차함수 $y=x^2-kx+4$의 그래프와 x축의 위치 관계가 다음과 같도록 실수 k의 값을 정하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 접한다.

(3) 만나지 않는다.

풀이 이차식 x^2-kx+4의 판별식은 $D=k^2-16$이다.

(1) $D>0$이어야 하므로 $k^2>16$. 즉 $k<-4$ 또는 $k>4$.

(2) $D=0$이어야 하므로 $k^2=16$. 즉 $k=\pm 4$.

(3) $D<0$이어야 하므로 $k^2<16$. 즉 $-4<k<4$. □

예제 18. 이차방정식 $x^2-2ax+a=0$의 두 근이 모두 -1보다 크도록 실수 a의 값의 범위를 정하여라.

풀이 이차함수의 그래프의 성질을 활용한다.

$f(x)=x^2-2ax+a$라고 하자. 두 근을 가져야 하므로 판별식은 $D=4a^2-4a>0$이다. 따라서

$$a\le 0 \text{ 또는 } 1\le a$$

이다. 축의 방정식이 $x=a$인데, 축이 $x=-1$ 오른쪽에 있어야 하므로

$$a>-1$$

이다. $x=-1$일 때 함숫값이 양수이어야 하므로

$$f(-1)=1+3a>0 \quad \text{즉} \quad -\frac{1}{3}<a$$

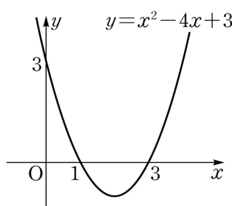
이다. 위 세 조건을 모두 만족시켜야 하므로 답은 다음과 같다.

$$-\frac{1}{3}<a\le 0 \text{ 또는 } a\ge 1.$$ □

예제 19. 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프를 이용하여 다음 부등식을 풀어라.

(1) $x^2-4x+3>0$

(2) $x^2-4x+3\le 0$



풀이 (1) 그래프가 x축 위쪽에 있는 부분이므로 $x<1$ 또는 $x>3$이다.

(2) 그래프가 x축 아래쪽에 있는 부분이므로 $1\le x\le 3$이다. □

예제 20. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+mx-m+3>0$이 성립하도록 실수 m의 값의 범위를 정하여라.

풀이 $y=x^2+mx-m+3$이라고 하자. 이때 이 이차함수의 그래프가 x축과 만나지 않아야 한다. 따라서 판별식은

$$D=m^2-4(-m+3)<0$$

이 되어야 한다. □

5 분수함수

함수 중에서 x에 대한 유리식으로 나타낼 수 있는 함수를 **유리함수**라고 부른다. 또한 x에 대한 분수식으로 나타낼 수 있는 함수를 **분수함수**라고 부른다. 즉 유리함수는 다항함수와 분수함수로 나눌 수 있다.

분수함수 $y=k/x$의 그래프

함수 $y=\dfrac{k}{x}$는 다음과 같은 성질을 가진다. $(k\ne 0)$

(1) 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.

(2) $k>0$이면 그래프는 제 1, 3 사분면에 있고,
$k<0$이면 그래프는 제 2, 4 사분면에 있다.

(3) 그래프는 원점에 대하여 대칭인 쌍곡선이다.

(4) $|k|$의 값이 커질수록 그래프가 원점에서 멀어진다.

(5) 그래프의 점근선은 x축, y축이다.

분수함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프는 분수함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$는 다음과 같은 성질을 가진다.

- 정의역은 $\{x\,|\,x\ne p\}$이고 치역은 $\{y\,|\,y\ne q\}$이다.
- 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭인 쌍곡선이다.
- 그래프의 점근선은 두 직선 $x=p$와 $y=q$이다.

예제 21. 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$의 정의역, 치역, 점근선의 방정식을 구하고 그래프를 그려라. 또한 역함수를 구하여라.

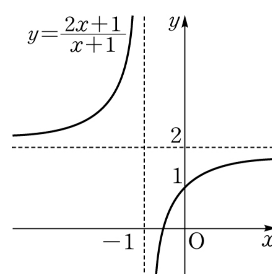
풀이 주어진 분수함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하자.

$$y=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2(x+1)-1}{x+1}=\frac{-1}{x+1}+2.$$

① 정의역은 $\{x\,|\,x\ne -1\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ne 2\}$.

② 점근선은 $x=-1$과 $y=2$이다.

③ 그래프는 다음과 같다.



④ 주어진 식의 x와 y를 바꾸면 $x=\dfrac{-1}{y+1}+2$이다.

이 식을 y에 대하여 풀면 $y=-\dfrac{1}{x-2}-1\ (x\neq 2)$이다. □

참고 분수함수의 역함수는 분수함수가 된다.

증명 분수함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 역함수를 구해보자.

$$y=\frac{k}{x-p}+q \Rightarrow y-q=\frac{k}{x-p} \Rightarrow x-p=\frac{k}{y-q} \Rightarrow x=\frac{k}{y-q}+p$$

따라서 분수함수의 역함수는 분수함수이다. □

위와 같은 성질을 이용하면 분수함수의 역함수를 더 쉽게 구할 수 있다.

예제 22. 함수 $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$의 역함수를 구하여라.

풀이 주어진 함수를 변형하면

$$y=\frac{-1}{x+1}+2$$

이다. 이 함수의 그래프는 $(-1,\ 2)$에 대하여 대칭이므로, 이 함수의 역함수의 그래프는 $(2,\ -1)$에 대하여 대칭이다. 따라서 역함수는 다음과 같다.

$$y=\frac{-1}{x-2}-1 \quad (x\neq 2)$$ □

6 무리함수

함수 중에서 x에 대한 무리식으로 나타낼 수 있는 함수를 **무리함수**라고 부른다.

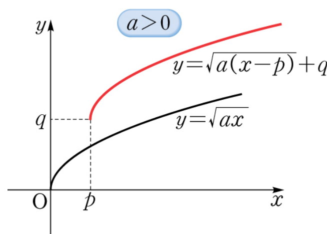
무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프

함수 $y=\sqrt{ax}$는 다음과 같은 성질을 가진다. $(a\neq 0)$

(1) $a>0$일 때 정의역은 $\{x|x\geq 0\}$, 치역은 $\{y|y\geq 0\}$이다.
$a<0$일 때 정의역은 $\{x|x\leq 0\}$, 치역은 $\{y|y\leq 0\}$이다.

(2) 그래프는 함수 $y=\dfrac{1}{a}x^2$ 의 그래프와 $y=x$에 대하여 대칭이다. (단, 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 0\}$이다.)

함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 정의역과 치역은 다음과 같다.

- $a>0$일 때 정의역은 $\{x\,|x\geq p\}$, 치역은 $\{y\,|y\geq q\}$이다.
- $a<0$일 때 정의역은 $\{x\,|x\leq p\}$, 치역은 $\{y\,|y\geq q\}$이다.

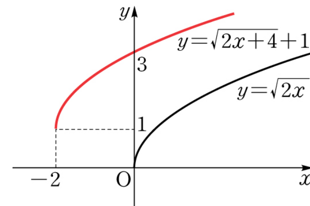
예제 23. 함수 $y=\sqrt{2x+4}+1$의 정의역과 치역을 구하고 그래프를 그려라. 또한 역함수를 구하여라.

풀이 주어진 함수를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 꼴로 바꾼다.

$$y=\sqrt{2x+4}+1=\sqrt{2(x+2)}+1.$$

① 정의역은 $\{x\,|x\geq -2\}$, 치역은 $\{y\,|y\geq 1\}$.

② 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 모양이다.



③ 주어진 식의 x와 y를 바꾸면 $x=\sqrt{2(y+2)}+1$이다. 이 식을 y에 대하여 풀면 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$이다. 따라서 역함수는

$$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2 \quad (x\geq 1).$$ □

참고 무리함수와 이차함수는 서로 역함수이다. 즉 무리함수의 역함수는 이차함수가 되고, 이차함수의 역함수는 무리함수가 된다. 이때 역함수의 식을 구한 뒤 정의역을 명시해주어야 한다.

예제 24. 정의역이 $\{x\,|x\geq 0\}$인 함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$의 역함수를 구하여라.

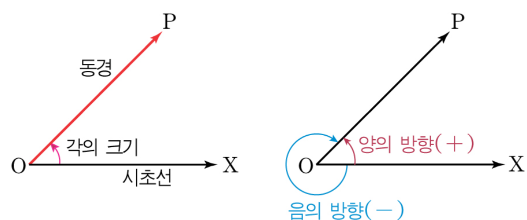
풀이 주어진 이차함수의 치역은 $\{y\,|y\leq 2\}$이다. 주어진 식의 x와 y를 바꾸면 $x=\frac{1}{2}y^2+2$이고, 이것을 y에 대하여 풀면 $y=\sqrt{-2x+4}$이다. 따라서 구하는 역함수는 다음과 같다.

$$y=\sqrt{-2x+4} \quad (x\leq 2)$$ □

7 삼각함수

중학교에서는 θ의 값이 $0\leq\theta\leq 90^\circ$의 범위에 있을 때 사인, 코사인, 탄젠트의 값을 생각하였다. 그러나 고등학교에서는 그보다 더 큰 각이나 음수의 각에 대해서도 사인, 코사인, 탄젠트의 값을 생각한다. 이를 위해서 먼저 여러 가지 각을 나타내는 방법을 살펴보자.

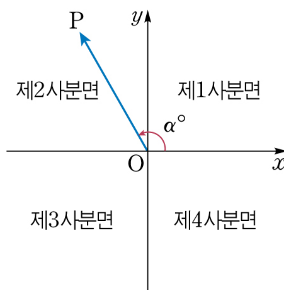
아래 그림에서 각 XOP를 생각할 때 $\overrightarrow{OX}$를 $\angle$XOP의 **시초선**, $\overrightarrow{OP}$를 $\angle$XOP의 **동경**이라고 부른다.



동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시곗바늘이 도는 방향과 반대인 방향을 **양의 방향**이라고 하고, 시곗바늘이 도는 방향과 같은 방향을 **음의 방향**이라고 한다. 또 동경 OP가 양의 방향으로 회전하여 생기는 각의 크기는 양의 부호 +를 붙여 나타내고, 음의 방향으로 회전하여 생기는 각의 크기는 음의 부호 −를 붙여 나타낸다.

> **일반각** 일반적으로 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 $\alpha°$라고 하면 $\angle$XOP의 크기는 $360°\times n+\alpha°$(n은 정수)의 꼴로 나타낼 수 있다. 이것을 동경 OP가 나타내는 **일반각**이라고 한다.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면의 원점 O에서 x축의 양의 방향을 시초선으로 잡았을 때, 동경 OP가 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있으면 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의 각이라고 부른다.



예제 25. 다음 각은 제 몇 사분면의 각인지 말하여라.

(1) 400° (2) 960° (3) −210° (4) −420°

풀이 (1) $400°=360°+40°$이므로 제1사분면의 각이다.
(2) $960°=360°\times2+240°$이므로 제3사분면의 각이다.
(3) $-210°=-360°+150°$이므로 제2사분면의 각이다.
(4) $-420°=-360°\times2+300°$이므로 제4사분면의 각이다.

호의 길이와 반지름의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기를 1 **라디안**(radian)이라고 하며, 이것을 단위로 각의 크기를 나타내는 방법을 **호도법**이라고 한다.

> $$1\text{라디안}=\frac{180°}{\pi},\quad 1°=\frac{\pi}{180}\text{라디안}$$

참고 라디안도 도(°)처럼 각의 단위이다. 각을 나타낼 때 보통 라디안은 생략하여 쓴다. 즉 단위가 표기되지 않은 각의 단위는 라디안이다.

예제 26. 다음 표를 완성하여라.

육십분법		45°	60°	90°	120°		270°	360°
호도법	$\frac{\pi}{6}$					π		

풀이 $180°=\pi$라는 등식을 기억하고 있으면 편리하다.

육십분법	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
호도법	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

> **호의 길이와 부채꼴의 넓이**
> 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 부채꼴의 넓이를 S라고 하면 다음이 성립한다.
> $$l=r\theta,\quad S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl.$$

증명 $l=2\pi r\times\frac{\theta}{2\pi}=r\theta$,

$$S=\pi r^2\times\frac{\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r(r\theta)=\frac{1}{2}rl.$$ ■

예제 27. 다음과 같은 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하여라.

(1) 반지름의 길이가 6cm, 중심각의 크기가 $\frac{4}{3}\pi$인 부채꼴

(2) 반지름의 길이가 10cm, 중심각의 크기가 45°인 부채꼴

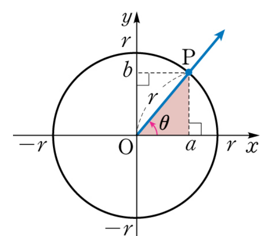
풀이 (1) (호의 길이)$=6\times\frac{4}{3}\pi=8\pi$ (cm).

(부채꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{4}{3}\pi=24\pi$ (cm^2).

(2) (호의 길이)$=10\times\frac{1}{4}\pi=\frac{5}{2}\pi$ (cm).

(부채꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{1}{4}\pi=\frac{25}{2}\pi$ (cm^2).

직각삼각형을 이용하여 사인, 코사인, 탄젠트를 정의하면 각의 범위가 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$일 때에만 가능하다. 따라서 중심이 원점인 원을 이용하여 이들을 정의한다.

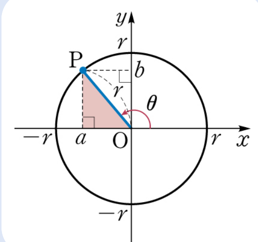


오른쪽 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름이 r인 원 위의 점 P$(a,\ b)$에 대하여 동경 $\overrightarrow{OP}$가 나타내는 각을 θ라고 하자. 이때

$$\frac{b}{r},\ \frac{a}{r},\ \frac{b}{a}$$

의 값은 θ의 값에 따라 하나로 결정된다.

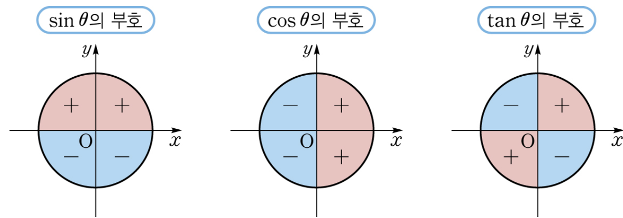
> **삼각함수의 정의 (1)**
> 오른쪽 그림에서 다음과 같이 정의한다.
> $$\sin\theta=\frac{b}{r},$$
> $$\cos\theta=\frac{a}{r},$$
> $$\tan\theta=\frac{b}{a}.\quad(\text{단, } a\ne0)$$



참고 sin은 '사인', cos은 '코사인', tan은 '탄젠트'라고 읽는다.

이와 같은 함수들을 일반각 θ에 대한 **삼각함수**라고 부른다.

각 사분면에서 이들 삼각함수의 부호는 다음과 같다.



예제 28. 점 P(−3, 4)를 지나는 동경 OP가 나타내는 각을 θ라고 하자. 이때 θ에 대한 삼각함수의 값을 구하여라.

풀이 삼각함수의 정의에 의하여 다음과 같이 계산된다.

$$\sin\theta=-\frac{4}{5},\quad \cos\theta=\frac{3}{5},\quad \tan\theta=-\frac{4}{3}. \qquad \square$$

예제 29. $\theta=\frac{7}{6}\pi$일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

풀이 반지름이 1인 원을 이용하면 $r=1$이 되므로 삼각함수의 값을 계산하기에 편리하다.
오른쪽 그림과 같이 반지름이 1인 원에서 $\theta=\frac{7}{6}\pi$가 되도록 하는 점의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

이 된다. 따라서 구하는 삼각함수의 값은 다음과 같다.

$$\sin\theta=-\frac{1}{2},\quad \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tan\theta=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad \square$$

예제 30. 다음 각을 호도법으로 바꾸고 각에 대한 삼각함수표를 만들어라.

30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 180°, 240°, 360°

풀이

육십분법	30°	45°	60°	90°	120°	180°	240°	360°
호도법	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{4}{3}\pi$	2π
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	없음	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	0

참고로 $\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{4}$의 자연수배인 각을 **특수각**이라고 부른다.

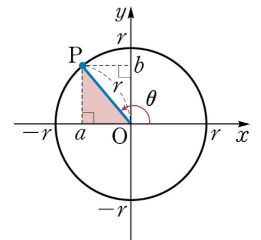
삼각함수 사이의 관계 (1)

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

증명 오른쪽 그림에서

$$\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{b/r}{a/r}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{b^2}{r^2}+\frac{a^2}{r^2}=\frac{a^2+b^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1. \qquad \square$$



임의의 정수 n에 대하여, 각 θ와 각 $2n\pi+\theta$가 나타내는 동경은 일치하므로 다음을 얻는다.

$$\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta,$$
$$\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta,$$
$$\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta.$$

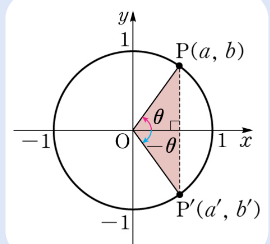
또한 일반각에 대한 삼각함수 공식은 다음과 같다.

(1) $-\theta$의 삼각함수

① $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

② $\cos(-\theta)=\cos\theta$

③ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

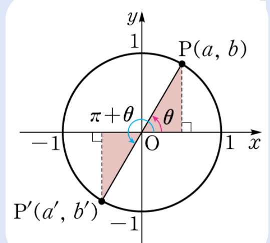


(2) $\pi+\theta$의 삼각함수

① $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

② $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

③ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

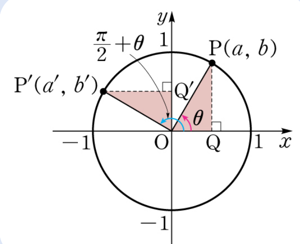


(3) $\frac{\pi}{2}+\theta$의 삼각함수

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

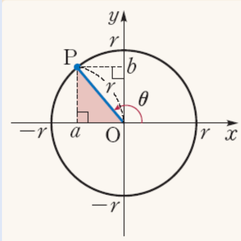


위 공식들을 무조건 외우려고 하면 어려우므로, 단위원에 그림을 그려서 이해해야 한다. 또한 앞으로 공부할 삼각함수의 그래프를 연관시켜 기억하면 편리하다.

다음으로 사인, 코사인, 탄젠트 외의 삼각함수를 살펴보자. 삼각형은 3개의 변을 가지고 있으므로 그 중에서 순서를 고려하여 2개를 선택하는 경우의 수는 $3\times2=6$이다. 따라서 삼각형을 이용하여 정의하는 삼각함수는 사인, 코사인, 탄젠트 이외에 3개를 더 정의할 수 있다.

삼각함수의 정의 (2)

오른쪽 그림에서 다음과 같이 정의한다.



$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{r}{b} \quad (\text{단, } b\neq0)$$

$$\sec\theta=\frac{r}{a} \quad (\text{단, } a\neq0)$$

$$\cot\theta=\frac{a}{b} \quad (\text{단, } b\neq0)$$

참고 cosec는 '코시컨트', sec는 '시컨트', cot는 '코탄젠트'라고 읽는다.

삼각함수 사이의 관계 (2)

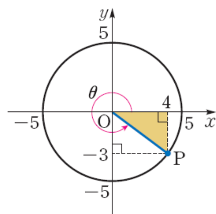
① $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

② $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

증명 ①은 당연하다.

② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면 첫 번째 등식을 얻고, 양변을 $\sin^2\theta$로 나누면 두 번째 등식을 얻는다. ■

보기 31. 오른쪽 그림과 같이 원점 O와 점 P$(4,\ -3)$을 지나는 동경 OP가 나타내는 각을 θ라고 하면 $\overline{OP}=5$이므로 삼각함수의 정의에 의하여 다음을 얻는다.

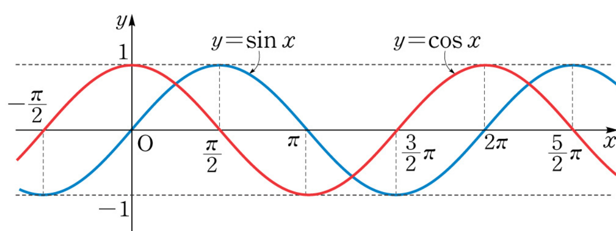


$$\operatorname{cosec}\theta=-\frac{5}{3},\ \sec\theta=\frac{5}{4},\ \cot\theta=-\frac{4}{3}$$

8 삼각함수의 활용

함수 $f(x)$에 대하여 양수 p가 존재하여 정의역의 모든 점 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$가 성립할 때 f를 **주기함수**라고 부른다. 그러한 양수 p 중에서 가장 작은 값을 f의 **주기**라고 부른다.

사인 함수의 그래프와 코사인 함수의 그래프는 다음과 같다.



이 두 함수의 성질은 다음과 같다.

사인과 코사인의 성질

사인 함수와 코사인 함수는 다음과 같은 성질을 가진다.

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

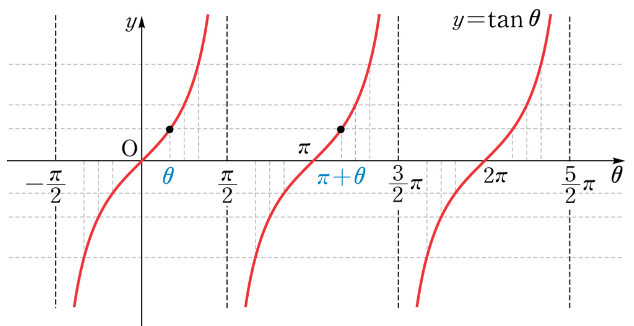
(2) 치역은 $\{y\mid-1\leq y\leq1\}$이다. 즉 최댓값은 1이고 최솟값은 -1이다.

(3) 사인 함수의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, 코사인 함수의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

(4) 주기가 2π인 주기함수이다.

(5) 코사인 함수의 그래프는 사인 함수의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 모양이다.

다음으로 탄젠트 함수의 그래프는 다음과 같다.



탄젠트 함수의 성질은 다음과 같다.

탄젠트의 성질

탄젠트 함수는 다음과 같은 성질을 가진다.

(1) 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\right\}$이다.

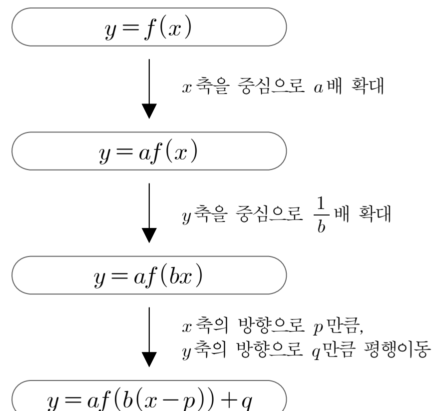
(2) 치역은 실수 전체의 집합이다.

(3) 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(4) 주기가 π인 주기함수이다.

(5) 점근선은 직선 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

참고 $y=af(bx+c)+d$ 꼴의 함수는 $y=af(b(x-p))+q$의 꼴로 변형한 후 다음 성질을 이용한다.



예제 32. 다음 함수의 주기와 최댓값, 최솟값을 구하여라.

(1) $y=\sin\frac{x}{2}$ (2) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+1$

(3) $y=2\cos(x-\pi)-1$ (4) $y=\cos3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

풀이 $y=f(x)$의 주기가 p이면 $y=f(bx)$의 주기는 $\frac{p}{b}$이다.

(1) 주기는 4π, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

(2) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+1=\frac{1}{2}\sin\left\{\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)\right\}+1$이므로

주기는 6π, 최댓값은 $\frac{3}{2}$, 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

(3) 주기는 2π, 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.

(4) 주기는 $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다. □

예제 33. 다음 함수의 주기와 점근선을 구하여라.

(1) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ (2) $y=\tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right)$

풀이 (1) 주기는 π이고, 점근선은 $x=n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)인 직선이다.

(2) $y=\tan\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)=\tan\left\{\frac{1}{2}(x+2\pi)+\pi\right\}$이므로 주기는 2π이고 점근선은 $x=(2n+1)\pi$ (n은 정수)인 직선이다. □

각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함하는 방정식과 부등식을 각각 **삼각방정식**, **삼각부등식**이라고 부른다. 삼각방정식이나 삼각부등식을 풀 때에는 단위원이나 삼각함수의 그래프를 이용하여 푼다.

예제 34. 다음 삼각방정식을 풀어라. (단, $0\le x<2\pi$)

(1) $2\cos x+1=0$ (2) $\tan x-\sqrt{3}=0$

풀이 (삼각함수)=(상수)꼴로 만들어 푼다.

(1) 식을 변형하면 $\cos x=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$이다.

(2) 식을 변형하면 $\tan x=\sqrt{3}$이다.

따라서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$이다. □

예제 35. 다음 삼각부등식을 풀어라. (단, $0\le x<2\pi$)

(1) $2\sin x>\sqrt{3}$ (2) $\tan x\le\frac{\sqrt{3}}{3}$

풀이 부등호를 등호로 바꾸고 삼각방정식을 풀어 범위의 경계값을 구한 뒤 그래프를 살펴보고 부등식으로 바꾼다.

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$를 풀면 $x=\frac{1}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$이다.

사인 함수의 그래프에서 $\frac{1}{3}\pi<x<\frac{2}{3}\pi$일 때 그래프가 직선 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 위쪽에 놓이므로 답은 $\frac{1}{3}\pi<x<\frac{2}{3}\pi$이다.

(2) $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$을 풀면 $x=\frac{1}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$이다.

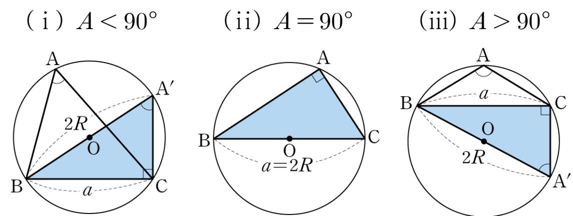
탄젠트 함수의 그래프를 이용하면 구하는 답은

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$이다.

삼각형의 세 변의 길이와 세 각, 외접원의 반지름 사이에 다음과 같은 법칙이 성립한다.

> **사인 법칙**
> $\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면
> $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$
> 가 성립한다.

증명 $\triangle ABC$의 외접원의 중심을 O, 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면 $\triangle ABC$는 $\angle A$의 크기에 따라 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어진다.



(i) $\sin A=\sin A'=\frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}=\frac{a}{2R}$

(ii) $\sin A=1=\frac{a}{2R}$

(iii) $\sin A=\sin(\pi-A')=\sin A'=\frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}=\frac{a}{2R}$

(i), (ii), (iii)에서 $\angle A$의 크기에 관계없이

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \text{즉}\ \frac{a}{\sin A}=2R$$

가 성립한다. 같은 방법으로

$$\frac{b}{\sin B}=2R,\quad \frac{c}{\sin C}=2R$$

도 성립함을 알 수 있다. 따라서 다음 법칙을 얻는다.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$ ■

참고 사인법칙에 의해 $\triangle ABC$의 세 변의 길이와 세 각의 크기 사이에는 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$가 성립한다.

예제 36. $\triangle ABC$에서 다음을 구하여라.

(1) $B=105^\circ$, $C=30^\circ$, $c=15$일 때 a의 값

(2) $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $B=30^\circ$일 때, 예각 A와 c의 값

풀이 (1) $A=45^\circ$이므로

$$\frac{a}{\sin45^\circ}=\frac{15}{\sin30^\circ}$$

이다. 따라서 $a=15\sqrt{2}$이다.

(2) $\frac{\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{1}{\sin30^\circ}$이므로 $A=60^\circ$이다.

$C=90^\circ$이고 $\frac{1}{\sin30^\circ}=\frac{c}{\sin C}$이므로 $c=2$이다. □

예제 **37.** $\triangle ABC$에서 다음 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

(1) $a\sin A = b\sin B$　　　(2) $a\sin A + b\sin B = c\sin C$

풀이 어떤 삼각형인지 물을 때에는 각의 크기를 비교해보거나 변의 길이를 비교해본다. 이런 문제에서 나올 수 있는 답은 거의 이등변삼각형, 직각삼각형, 정삼각형 등으로 한정되어 있다.

(1) 외접원의 반지름을 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$$

이고, 이것을 주어진 식과 연립하여 풀면 $a=b$를 얻는다. 따라서 $\triangle ABC$는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

(2) 사인법칙에 의해

$$\sin A = \frac{a}{2R},\ \sin B = \frac{b}{2R},\ \sin C = \frac{c}{2R}$$

이므로 주어진 식의 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$에 위 식을 대입하여 정리하면 $a^2 + b^2 = c^2$을 얻는다. 따라서 $\triangle ABC$는 직각삼각형이다. □

예제 **38.** $\triangle ABC$에서 $a\sin(A+B) = c\sin A$임을 증명하여라.

풀이 $A+B = 180^\circ - C$임을 이용하자.

외접원의 반지름을 R라고 하면 사인법칙에 의하여

$$a = 2R\sin A,\quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

이므로

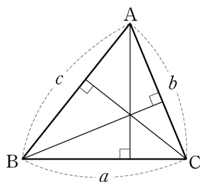
$$\begin{aligned} a\sin(A+B) &= a\sin(180^\circ - C) = a\sin C \\ &= 2R\sin A \cdot \frac{c}{2R} = c\sin A. \end{aligned}$$ □

코사인 법칙 $\triangle ABC$에서 다음이 성립한다.

(1) 제 1 코사인 법칙
① $a = c\cos B + b\cos C$
② $b = a\cos C + c\cos A$
③ $c = b\cos A + a\cos B$

(2) 제 2 코사인 법칙
① $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
② $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$
③ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

증명 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$에서 코사인의 정의에 의하여



$$a = c\cos B + b\cos C,$$
$$b = a\cos C + c\cos A,$$
$$c = b\cos A + a\cos B$$

가 성립한다. 이 세 식의 양변에 순서대로 a, b, c를 곱하면

$$a^2 = ac\cos B + ab\cos C,$$
$$b^2 = ab\cos C + bc\cos A,$$
$$c^2 = bc\cos A + ac\cos B$$

를 얻는다.

이 세 식을 연립하여 풀면 제 2 코사인법칙

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

를 얻는다. ■

참고 제 2 코사인 법칙은 삼각형의 두 변의 길이와 끼인각의 크기를 알고 있을 때 나머지 한 변의 길이를 구하는 데에 사용된다. 또한

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

와 같이 세 변의 길이를 이용하여 각의 크기를 구할 때에도 사용된다.

예제 **39.** $\triangle ABC$에서 다음을 구하여라.

(1) $C = 120^\circ$, $a = 10$, $b = 4$일 때, c의 값
(2) $a : b : c = 13 : 8 : 7$일 때 A의 값
(3) $a = \sqrt{3} + 1$, $b = 2$, $c = \sqrt{6}$일 때 B의 값

풀이 하나의 각과 세 변의 길이가 나오면 제 2 코사인 법칙을 생각한다.

(1) 코사인 법칙에 의하여

$$c^2 = 10^2 + 4^2 - 2\times 10 \times 4\cos 120^\circ = 156$$

이다. 그런데 $c > 0$이므로 $c = 2\sqrt{39}$이다.

(2) $a = 13k$, $b = 8k$, $c = 7k$로 두면 (단, $k \neq 0$)

$$\cos A = \frac{64k^2 + 49k^2 - 169k^2}{2\times 8k \times 7k} = -\frac{1}{2}.$$

그런데 $0 < A < 180^\circ$이므로 $A = 120^\circ$.

(3) $\cos B = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

그런데 $0^\circ < B < 180^\circ$이므로 $B = 45^\circ$. □

예제 **40.** $\triangle ABC$에서 다음 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

(1) $a\cos A = b\cos B$　　　(2) $\sin A = 2\cos B\sin C$

풀이 코사인 법칙을 이용하여 주어진 식의 삼각함수를 없애고 a, b, c에 대한 식으로 변형한다.

(1) 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이므로 $a\cos A = b\cos B$에 대입하면

$$a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이다. 이것을 정리하면

$$(a+b)(a-b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

이므로 $a = b$ 또는 $c^2 = a^2 + b^2$이다. 즉 $\triangle ABC$는 $a = b$인 이등변삼각형이거나 $C = 90^\circ$인 직각삼각형이다.

(2) △ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

이므로 $\sin A=2\cos B\sin C$에 대입하면

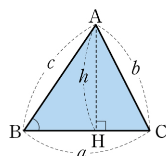
$$\frac{a}{2R}=2\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{c}{2R}$$

이다. 이것을 정리하면 $b^2=c^2$를 얻는다. b와 c는 양수이므로 △ABC 는 $b=c$인 이등변삼각형이다. □

삼각형의 넓이 △ABC 의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

증명 오른쪽 그림의 삼각형에서 밑변의 길이는 a이고 높이는 $h=b\sin C$이므로 이 삼각형의 넓이는



$$\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C$$

가 됨을 알 수 있다. 이것은 C가 직각이거나 둔각일 때에도 동일하게 성립한다. ■

참고 위 공식은 삼각형의 두 변의 길이와 끼인각의 크기를 알고 있을 때 사용하는 공식이다.

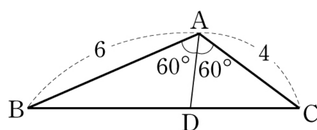
예제 41. 다음 △ABC 의 넓이를 구하여라.

(1) $b=4,\ c=6,\ A=135^\circ$ (2) $a=\sqrt{3},\ c=8,\ B=120^\circ$

풀이 (1) $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times6\sin135^\circ=6\sqrt{2}$.

(2) $\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\times8\times\sqrt{3}\sin120^\circ=6$. □

예제 42. 아래 그림과 같은 △ABC 에서 $\overline{\rm AD}$의 길이를 구하여라.



풀이 $\overline{\rm AD}=x$라고 하면 △ABD＋△ACD＝△ABC 이므로

$$\frac{1}{2}\cdot6x\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot4x\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\sin120^\circ$$

이다. 따라서 $3x+2x=12$이므로 $x=\frac{12}{5}$. □

예제 43. △ABC 의 넓이를 S라고 하고 외접원의 반지름의 길이를 R라고 할 때 $S=\frac{abc}{4R}$가 성립함을 증명하여라.

풀이 사인법칙에 의하여 $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}.$$ □

예제 44. 세 변의 길이가 13cm, 14cm, 15cm 인 삼각형의 넓이를 구하여라.

풀이 △ABC 에서 $a=15,\ b=14,\ c=13$이라고 하자. 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{13^2+14^2-15^2}{2\times13\times14}=\frac{5}{13}$$

이다. $\sin A>0$이므로

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$$

이다. 삼각형의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot13\cdot13\cdot\frac{12}{13}=84\ (\text{cm}^2).$$ □

참고 세 변의 길이가 주어진 삼각형 △ABC 의 넓이는

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

이다. $\left(\text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}\right)$ 이 공식을 **헤론의 공식**이라고 부른다.

9 삼각함수의 덧셈정리

삼각함수의 성질을 이용하면 여러 가지 유용한 공식을 이끌어낼 수 있다.

삼각함수의 덧셈정리

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

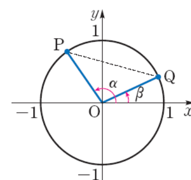
(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

증명 오른쪽 그림에서



$$\text{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ \text{Q}(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

이고 $\angle\text{POQ}=\alpha-\beta$이다.

삼각형 POQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\rm PQ}^2=\overline{\rm OP}^2+\overline{\rm OQ}^2-2\cdot\overline{\rm OP}\cdot\overline{\rm OQ}\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

이다. 여기서 $\overline{\rm OP}=\overline{\rm OQ}=1$이므로 이 식은

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

이고, 이 식을 정리하면 다음을 얻는다.

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

여기에 β 대신 $-\beta$를 넣으면

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

이고, 다시 이 식에 α 대신 $\alpha-\pi/2$를 넣으면

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

를 얻는다. 다른 공식은 $\sin(\alpha+\beta)$와 $\cos(\alpha+\beta)$를 이용하여 유도할 수 있다. ■

참고 덧셈정리에서 $\alpha+\beta$에 대한 공식만 기억하면 된다. $\alpha-\beta$에 대한 공식은 β를 $-\beta$로 바꾸어 생각하면 된다.

예제 45. 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin 75^\circ$ (2) $\cos 105^\circ$ (3) $\tan 15^\circ$

풀이 (1) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ)$

$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ+45^\circ)$

$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(3) $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ-30^\circ) = \dfrac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ \tan 30^\circ}$

$= \dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$ □

예제 46. $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$이고 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\sin\beta=\dfrac{1}{2}$일 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

풀이 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$에서

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$이므로 $\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

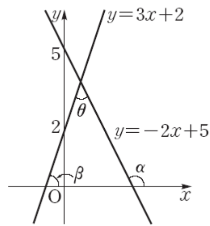
$= \dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$ □

예제 47. 좌표평면 위의 두 직선 $y=-2x+5$와 $y=3x+2$가 이루는 예각의 크기를 구하여라.

풀이 두 직선 $y=-2x+5$와 $y=3x+2$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면

$\tan\alpha=-2$, $\tan\beta=3$

이다. 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 $\theta=\alpha-\beta$이므로



$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{-2-3}{1+(-2)\cdot 3} = 1$

따라서 구하는 예각의 크기는 45°이다. □

주기가 같은 사인 함수와 코사인 함수의 합은 하나의 삼각함수로 나타낼 수 있다. 특히 주기의 비가 유리수인 삼각함수들의 합은 하나의 삼각함수로 나타낼 수 있다.

이와 같이 여러 개의 삼각함수의 합을 하나의 삼각함수로 나타내는 것을 삼각함수의 합성이라고 부른다.

여기서는 주기가 같은 사인과 코사인 함수의 합성을 살펴보자.

삼각함수의 합성

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$$

증명 $a\neq 0$, $b\neq 0$일 때

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

가 되는 각 α는 $[0, 2\pi)$의 범위에 단 하나가 존재한다. 이 각 α에 대하여

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{b\cos\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta)$

$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$. ■

참고 삼각함수의 합성 공식은 두 삼각함수의 합을 하나의 삼각함수로 나타내는 공식이다. 위 공식에서 각 α를 구하는 방법은

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

을 만족시키는 α를 찾으면 된다. □

예제 48. $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$를 $r\sin(\theta+\alpha)$의 꼴로 나타내어라.

풀이 $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로

$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta = 2\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$= 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\theta + \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\theta\right) = 2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$. □

예제 49. $f(x)=\sqrt{3}\sin x - \cos x$의 최댓값과 최솟값, 주기를 구하여라.

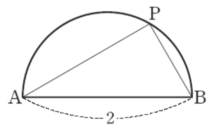
풀이 $\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$이므로

$f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x\right)$

$= 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\sin x - \sin\dfrac{\pi}{6}\cos x\right) = 2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

이때 $-2 \le 2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) \le 2$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다. 또 $y=f(x)$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $f(x)$의 주기는 2π이다. □

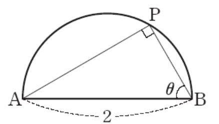
예제 50. 오른쪽 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 임의의 점을 P라고 할 때, $4\overline{AP}+3\overline{BP}$의 최댓값을 구하여라.



풀이 삼각형 ABP는 $\angle P=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\angle ABP = \theta\ (0^\circ<\theta<90^\circ)$

라고 하면 다음 등식이 성립한다.



$$\overline{AP}=2\sin\theta,\ \overline{BP}=2\cos\theta$$

따라서

$$4\overline{AP}+3\overline{BP}=8\sin\theta+6\cos\theta$$
$$=\sqrt{8^2+6^2}\left(\frac{4}{5}\sin\theta+\frac{3}{5}\cos\theta\right)$$
$$=10\sin(\theta+\alpha)\ \left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\right)$$

이므로 구하는 최댓값은 10이다. □

배각 공식과 반각 공식

(1) 배각공식

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(2) 반각공식

① $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

② $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

③ $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

증명 배각공식은 삼각함수의 덧셈정리에서 $\alpha=\beta$로 두면 된다. 반각공식은 배각공식의 ②를 변경하면 된다. 탄젠트 공식은 사인 공식과 코사인 공식을 이용하면 나온다. ■

예제 51. $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이고 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$일 때, 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin 2\alpha$ (2) $\cos 2\alpha$ (3) $\tan 2\alpha$

풀이 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$, $\tan\alpha>0$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

이다. 이 값을 이용하여 구하자.

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

(3) $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}}{1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=4\sqrt{5}$ □

예제 52. 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin 15°$ (2) $\cos 22.5°$ (3) $\tan 15°$

풀이 (1) $\sin^2 15°=\dfrac{1-\cos 30°}{2}=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

그런데 $\sin 15°>0$이므로

$$\sin 15°=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\cos^2 22.5°=\dfrac{1+\cos 45°}{2}=\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

그런데 $\cos 22.5°>0$이므로

$$\cos 22.5°=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

(3) $\tan^2 15°=\dfrac{1-\cos 30°}{1+\cos 30°}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$

그런데 $\tan 15°>0$이므로

$$\tan 15°=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$ □

10 지수함수

실수 a와 자연수 n에 대하여 $x^n=a$를 만족시키는 수 x를 a의 **n제곱근**이라고 부른다.

제곱근의 정의

a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 x라고 하면

① n이 짝수이고 $a\geq 0$일 때 $x=\pm\sqrt[n]{a}$이다.

② n이 짝수이고 $a<0$일 때 x는 존재하지 않는다.

③ n이 홀수일 때에는 a의 부호에 관계없이 x는 단 하나 존재한다. 그 값을 $\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

보기 53. (1) -8의 세제곱근은 -2이다.

(2) 81의 네제곱근은 3, -3이다.

(3) 256의 네제곱근은 4, -4이다. 이때 $\sqrt[4]{256}=4$이다.

(4) -16의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

(5) -27의 세제곱근은 -3이다. 이때 $\sqrt[3]{-27}=-3$이다.

예제 54. 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}$ (2) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$

(3) $(\sqrt[4]{4})^2$ (4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{729}}\sqrt{3}$

(5) $\sqrt[4]{243}+2\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}$ (6) $\sqrt[3]{16}\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{\sqrt{36}}$

풀이 (1) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{16}=2$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{27}=3$

(3) $(\sqrt[4]{4})^2=\sqrt[4]{4^2}=\sqrt[4]{16}=2$

(4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{729}}\sqrt{3}=\sqrt[12]{3^6}\sqrt{3}=\sqrt{3}\sqrt{3}=3$

(5) $\sqrt[4]{243}+2\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3^4\cdot 3}+2\sqrt[4]{2^4\cdot 3}-\sqrt[4]{3}$
$=3\sqrt[4]{3}+4\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3}=6\sqrt[4]{3}$

(6) $\sqrt[3]{16}\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{\sqrt{36}}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2}\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-\sqrt[3]{6}$
$=2\sqrt[3]{2}\cdot 2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}=4\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{6}=3\sqrt[3]{6}$ □

중학교에서는 지수가 자연수인 경우만 다루었다. 이제 지수가 실수인 경우까지 확장해보자.

자연수 지수 n이 자연수일 때, a를 n번 곱한 것을 a^n으로 나타낸다.

정수 지수 $a \neq 0$이고 n이 자연수일 때

$$a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

으로 정의한다.

유리수 지수 $a > 0$이고 m, n이 정수이며 $n \geq 2$일 때

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

으로 정의한다.

실수 지수 $a > 0$이고 r가 무리수라고 하자. r를 소수점 아래 k번째 자리까지 나타낸 유한소수를 r_k라고 하자. 그러면

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots,\ r_k,\ r_{k+1},\ \cdots$$

는 k의 값이 커짐에 따라 r에 가까워진다. (즉, 수열 $\{r_k\}$는 r에 수렴한다.) 이때

$$a^{r_1},\ a^{r_2},\ a^{r_3},\ \cdots,\ a^{r_k},\ a^{r_{k+1}},\ \cdots$$

는 k의 값이 커짐에 따라 어떠한 값에 점점 가까워지는데 가까워지는 그 값을 a^r로 정의한다. (즉, 수열 $\{a^{r_k}\}$가 수렴하는 값을 a^r의 값으로 정의한다.)

> **실수 지수법칙**
>
> $a > 0$, $b > 0$이고 x, y가 실수일 때 다음이 성립한다.
>
> ① $a^x a^y = a^{x+y}$ ② $a^x \div a^y = a^{x-y}$
>
> ③ $(a^x)^y = a^{xy}$ ④ $(ab)^x = a^x a^x$
>
> ⑤ $\left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{b^x}{a^x}$

참고 실수 지수법칙은 밑이 양수일 때에만 사용한다. 예를 들어

$$\{(-2)^2\}^{\frac{3}{2}} = (-2)^3 = -8$$

은 잘못된 계산이다. □

예제 55. $a > 0$, $b > 0$일 때 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt[3]{a^2b} \div \sqrt[12]{a^6b^{10}}$

(2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$

(3) $a^{\sqrt{2}+1} \div a^{\sqrt{2}-1}$

(4) $\left(a^{2\sqrt{3}}b^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

풀이 (1) (준식)$= (a^2b^3)^{\frac{1}{6}} \times (a^2b)^{\frac{1}{3}} \div (a^6b^{10})^{\frac{1}{12}}$

$= a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{6}}$

$= a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{2}}b^0 = \sqrt{a}$.

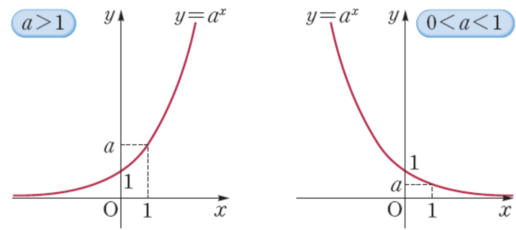
(2) (준식)$= \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a + b$.

(3) (준식)$= a^{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)} = a^2$.

(4) (준식)$= a^{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}b^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = a^6b^3$. □

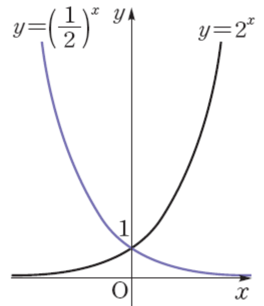
$a > 0$이고 $a \neq 1$일 때 함수 $y = a^x$를 **지수함수**라고 부른다. 지수함수의 그래프의 모양은 a의 값에 따라 달라진다.



> **지수함수 $y = a^x$의 성질** (단, $a > 0$, $a \neq 1$)
>
> (1) 정의역은 실수 전체 집합이고 치역은 양의 실수 전체 집합이다.
>
> (2) 점 (0, 1)과 (1, a)를 지나고, x축이 점근선이다.
>
> (3) $a > 1$일 때 증가하는 그래프이고
> $0 < a < 1$일 때 감소하는 그래프이다.
>
> (4) $y = a^x$와 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

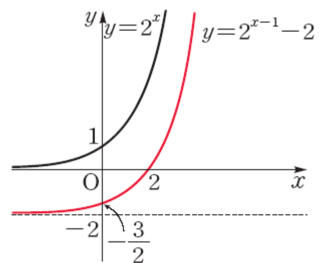
예제 56. 지수함수 $y = 2^x$와 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 그려라.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 함수의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.



예제 57. 함수 $y = \frac{2^x}{2} - 2$의 그래프를 그려라.

풀이 주어진 식을 변형하면 $y = 2^{x-1} - 2$이므로, 이 함수는 지수함수 $y = 2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 모양이다.



> **지수함수의 최대 · 최소**
>
> 함수 $y = a^{f(x)}$에서
>
> ① $a > 1$일 때 $f(x)$가 최대이면 $y = a^{f(x)}$도 최대이고, $f(x)$가 최소이면 $y = a^{f(x)}$도 최소이다.
>
> ② $0 < a < 1$일 때 $f(x)$가 최소이면 $y = a^{f(x)}$는 최대이고, $f(x)$가 최대이면 $y = a^{f(x)}$는 최소이다.
>
> 단, a^x을 포함한 항이 2개 이상인 경우 $a^x = t\ (t > 0)$로 치환하여 최대, 최소를 구한다.

예제 58. 다음 두 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[7]{8}$　　　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$, $\left(\frac{1}{27}\right)^2$

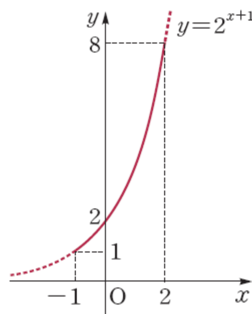
풀이 (1) $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$이고 $\sqrt[7]{8}=(2^3)^{\frac{1}{7}}=2^{\frac{3}{7}}$이므로

$$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}>2^{\frac{3}{7}}=\sqrt[7]{8}.$$

(2) $\left(\frac{1}{27}\right)^2=\left(\frac{1}{3^3}\right)^2=\frac{1}{3^6}<\frac{1}{3^4}=\left(\frac{1}{3}\right)^4.$ □

예제 59. 정의역이 $\{x\,|\,-1\le x\le 2\}$인 함수 $y=2^{x+1}$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이 아래 그림과 같이 함수 $y=2^{x+1}$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.



따라서 $y=2^{x+1}$은 $x=-1$일 때 최솟값 $2^{-1+1}=1$, $x=2$일 때 최댓값 $2^{2+1}=8$을 갖는다. □

지수방정식

(1) $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ 꼴의 방정식은 $f(x)=g(x)$를 푼다.

(2) $a^{f(x)}=b^{f(x)}$ 꼴의 방정식은 $a=b$ 또는 $f(x)=0$을 푼다.

(3) $a^{f(x)}=b^{g(x)}$ 꼴의 방정식은 양변에 로그를 취하여 푼다.

(4) a^x의 거듭제곱을 포함한 방정식은 $a^x=t$로 치환하여 푼다.

예제 60. 다음 지수방정식을 풀어라.

(1) $2^x=0.25$　　　(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x=3\sqrt{3}$

풀이 (1) $0.25=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=2^{-2}$이므로 $x=-2$.

(2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x=\left(\frac{1}{3^2}\right)^x=3^{-2x}$, $3\sqrt{3}=3\cdot 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}$이므로

$-2x=\frac{3}{2}$이다. 따라서 답은 $x=-\frac{3}{4}$. □

예제 61. 방정식 $4^x-3\cdot 2^x-4=0$을 풀어라.

풀이 $2^x=X$로 놓으면 $4^x=(2^2)^x=2^{2x}=(2^x)^2=X^2$이므로 주어진 방정식은 $X^2-3X-4=0$이고, 이것을 인수분해하면

$$(X-4)(X+1)=0,\quad X=4 \text{ 또는 } X=-1$$

그런데 $X>0$이므로 $X=4$이다.

따라서 $2^x=4=2^2$이므로 답은 $x=2$이다. □

지수부등식

(1) $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ 꼴의 부등식은 $a>1$이면 $f(x)>g(x)$를 풀고, $0<a<1$이면 $f(x)<g(x)$를 푼다.

(2) $a^{f(x)}>b^{g(x)}$ 꼴의 부등식은 양변에 로그를 취하여 푼다.

(3) a^x의 거듭제곱을 포함한 부등식은 $a^x=t$로 치환하여 푼다.

예제 62. 다음 지수부등식을 풀어라.

(1) $3^x>\sqrt[5]{27}$　　　(2) $0.25^x\le\frac{1}{32}$

풀이 (1) $\sqrt[5]{27}=\sqrt[5]{3^3}=3^{\frac{3}{5}}$이므로 $3^x>3^{\frac{3}{5}}$.

밑이 1보다 크므로 $x>\frac{3}{5}$이다.

(2) $0.25^x=\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$, $\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\le\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

밑이 1보다 작으므로 $2x\ge 5$. 따라서 답은 $x\ge\frac{5}{2}$이다. □

예제 63. 부등식 $9^x+3^{x+1}-18\ge 0$을 풀어라.

풀이 $3^x=X$로 놓으면

$$9^x=(3^x)^2=X^2,\ 3^{x+1}=3\cdot 3^x=3X$$

이므로 주어진 부등식은

$$X^2+3X-18\ge 0,\ (X+6)(X-3)\ge 0$$

이고 이것을 풀면

$$X\le -6 \text{ 또는 } X\ge 3$$

이다. 그런데 $X>0$이므로 $X\ge 3$이다. 다시 X를 3^x로 바꾸면 $3^x\ge 3$이고 밑이 1보다 크므로 구하는 답은 $x\ge 1$이다. □

11 로그함수

$a>0$, $a\ne 1$, $b>0$일 때 $a^x=b$를 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재하는데, 이 x를 $\log_a b$로 나타내고, a를 밑으로 하는 b의 **로그**라고 부른다. 이때 a를 **밑**, b를 **진수**라고 부른다. 즉

$$a^x=b \iff x=\log_a b$$

이다. [별다른 언급이 없으면 밑은 1이 아닌 양수이고 진수는 양수인 것으로 약속한다.]

예제 64. 다음 등식을 로그를 사용하여 나타내어라.

(1) $5^2=25$　　　(2) $10^{-2}=0.01$

(3) $16^{\frac{1}{2}}=4$　　　(4) $3^0=1$

풀이 (1) $2=\log_5 25$　　　(2) $-2=\log_{10}0.01$

(3) $\frac{1}{2}=\log_{16}4$　　　(4) $0=\log_3 1$ □

예제 65. 다음 등식을 $a^x = b$ 꼴로 나타내어라.

(1) $\log_3 81 = 4$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

(3) $\log_5 1 = 0$　　(4) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$

풀이 (1) $3^4 = 81$　　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

(3) $5^0 = 1$　　(4) $(\sqrt{2})^4 = 4$ □

로그의 성질

$a,\ b,\ M,\ N$이 양수이고 $a \neq 1,\ b \neq 1$일 때 다음이 성립한다.

(1) $\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$

(2) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N,\ \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(3) $\log_a M^k = k\log_a M$

(4) $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a},\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

증명 (1) $a > 0,\ a \neq 1$일 때, $a^0 = 1,\ a^1 = a$이므로 로그의 정의에 의하여 다음과 같은 성질을 얻는다.

$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$$

(2), (3) $M > 0,\ N > 0$일 때, $\log_a M = m,\ \log_a N = n$으로 놓으면 로그의 정의에 의하여 $a^m = M,\ a^n = N$이므로

$$MN = a^m a^n = a^{m+n},$$

$$\frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

$$M^k = (a^m)^k = a^{mk}\ (k\text{는 실수})$$

이다. 따라서 로그의 정의에 의하여 다음을 얻는다.

$$\log_a MN = m + n = \log_a M + \log_a N,$$

$$\log_a \frac{M}{N} = m - n = \log_a M - \log_a N,$$

$$\log_a M^k = mk = k\log_a M.$$

(4) $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ N > 0$일 때

$\log_a N = m,\ \log_b a = n$으로 두면 $N = a^m,\ a = b^n$이므로

$$N = a^m = (b^n)^m = b^{mn}$$

이다. 로그의 정의에 의하여 $mn = \log_b N$이므로

$$\log_a N \log_b a = \log_b N$$

이다. 따라서 양변을 $\log_b a$로 나타내면 다음이 성립한다.

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$ ■

예제 66. 다음 등식을 만족시키는 x의 값을 구하여라.

(1) $\log_{\sqrt{3}} 9 = x$　　(2) $\log_x 25 = \frac{2}{3}$

(3) $\log_{81} x = 0.5$　　(4) $\log_5(\log_{32} x) = -1$

풀이 (1) $(\sqrt{3})^x = 9$이므로 $x = 4$.

(2) $x^{\frac{2}{3}} = 25$이므로 $x = 125$.

(3) $81^{0.5} = x$이므로 $x = 9$.

(4) $5^{-1} = \log_{32} x,\ 32^{\frac{1}{5}} = x$이므로 $x = 2$. □

예제 67. $\log_x(8 + 2x - x^2)$이 정의되기 위한 실수 x의 범위를 구하여라.

풀이 (밑)$= x > 0,\ x \neq 1$, (진수)$= 8 + 2x - x^2 > 0$이어야 한다. 이것을 풀면 $0 < x < 1$ 또는 $1 < x < 4$가 된다. □

예제 68. 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\log_4 1 - \log_3 3$　　(2) $\log_5 25 + \log_{10} 10000$

(3) $\log_2 18 + 2\log_2 \frac{2}{3}$　　(4) $\log_3 2\sqrt{3} - 2\log_3 \sqrt{6}$

풀이 (1) $\log_4 1 - \log_3 3 = 0 - 1 = -1$

(2) $\log_5 25 + \log_{10} 10000 = \log_5 5^2 + \log_{10} 10^4 = 2 + 4 = 6$

(3) $\log_2 18 + 2\log_2 \frac{2}{3} = \log_2 18 + \log_2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \log_2\left(18 \cdot \frac{4}{9}\right)$

$= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3.$

(4) $\log_3 2\sqrt{3} - 2\log_3 \sqrt{6} = \log_3 2\sqrt{3} - \log_3(\sqrt{6})^2 = \log_3 \frac{2\sqrt{3}}{6}$

$= \log_3 \frac{\sqrt{3}}{3} = \log_3 3^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\log_3 3 = -\frac{1}{2}.$ □

예제 69. $a = \log_{10} 2,\ b = \log_{10} 3$이라 할 때, 다음을 $a,\ b$로 나타내어라.

(1) $\log_{10} 72$　　(2) $\log_{10} 5$

(3) $\log_{10} 1.8$　　(4) $\log_{10} \sqrt{150}$

풀이 (1) $\log_{10} 72 = \log_{10}(2^3 \cdot 3^2) = \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2$

$= 3\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 = 3a + 2b.$

(2) $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - a$

(3) $\log_{10} 1.8 = \log_{10} \frac{18}{10} = \log_{10} \frac{2 \cdot 3^2}{10}$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3^2 - \log_{10} 10$

$= \log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 - 1 = a + 2b - 1$

(4) $\log_{10} \sqrt{150} = \log_{10} 150^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{10} 150$

$= \frac{1}{2}\log_{10}(2 \cdot 3 \cdot 5^2) = \frac{1}{2}(\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 5^2)$

$= \frac{1}{2}\log_{10} 2 + \frac{1}{2}\log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + (1 - a)$

$= 1 - \frac{a}{2} + \frac{b}{2}.$ □

예제 70. 다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{\log_3 5 \cdot \log_5 8 \cdot \log_2 9}{\log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 4}$$

풀이 분모와 분자를 각각 간단히 하면

(분모)$= \log_2 5 \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 2^2}{\log_2 7} = \log_2 2^2 = 2,$

(분자)$= \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 5} \cdot \log_2 9 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5} \cdot \log_2 3^2$

$= \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{3\log_2 2}{\log_2 5} \cdot 2\log_2 3 = 6.$

따라서 구하는 값은 $\frac{6}{2} = 3$. □

10을 밑으로 하는 로그를 **상용로그**라고 부른다. 상용로그를 나타낼 때에는 밑을 생략하여 $\log_{10} N = \log N$으로 나타낸다. 상용로그 $\log N$의 값이

$$\log N = n + \alpha \ (n\text{은 정수, } 0 \le \alpha < 1)$$

일 때 n을 $\log N$의 **지표**라고 부르고, α를 $\log N$의 **가수**라고 부른다.

지표의 성질

① $\log N$에서 N의 정수부분이 n자리이면 지표는 $n-1$이다.
② $\log N$에서 N의 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나면 지표는 $-n$이다. 이때 $-n$을 $\overline{n}$으로 나타낸다.

가수의 성질

진수의 숫자 배열이 같고 소수점의 위치만 다른 수들의 상용로그의 가수는 모두 같다.

예제 71. 다음 값을 구하여라.

(1) $\log 10000$　　(2) $\log \frac{1}{100}$

(3) $\log \sqrt[4]{1000}$　　(4) $\log 10\sqrt{10}$

풀이 (1) $\log 10^4 = 4$

(2) $\log 10^{-2} = -2$

(3) $\log 10^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$

(4) $\log(10 \cdot 10^{\frac{1}{2}}) = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$ □

예제 72. 다음 상용로그의 값에서 지표와 가수를 구하여라.

(1) 3.5465　　(2) $\overline{2}.8432$　　(3) -1.6576

풀이 (1) $3.5465 = 3 + 0.5465$이므로 지표는 3, 가수는 0.5465.

(2) $\overline{2}.8432 = -2 + 0.8432$이므로 지표는 -2, 가수는 0.8432.

(3) $-1.6576 = -2 + 0.3424$이므로 지표는 -2, 가수는 0.3424.

예제 73. $\log 2.46 = 0.3909$임을 이용하여 다음 상용로그의 값을 구하고, 지표와 가수를 구하여라.

(1) $\log 246$　　(2) $\log 24.6$

(3) $\log 0.246$　　(4) $\log 0.0246$

풀이 (1) $\log 246 = \log 2.46 + \log 10^2 = 2.3909$
지표는 2, 가수는 0.3909.

(2) $\log 24.6 = \log 2.46 + \log 10 = 1.3909$
지표는 1, 가수는 0.3909.

(3) $\log 0.246 = \log 2.46 + \log 10^{-1} = \overline{1}.3909$
지표는 -1, 가수는 0.3909.

(4) $\log 0.0246 = \log 2.46 + \log 10^{-2} = \overline{2}.3909$
지표는 -2, 가수는 0.3909. □

예제 74. $\log 47.7 = 1.6785$일 때, 다음 등식을 만족시키는 x의 값을 구하여라.

(1) $\log x = 3.6785$　　(2) $\log x = \overline{2}.6785$

풀이 가수가 모두 0.6785이므로 진수 x는 47.7과 숫자의 배열이 같음을 알 수 있다.

(1) $\log x = 3.6785$에서 지표가 3이므로 x는 정수부분이 네 자리인 수이다. 따라서 $x = 4770$.

(2) $\log x = \overline{2}.6785$에서 지표가 -2이므로 x는 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 수이다. 따라서 $x = 0.0477$. □

예제 75. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$일 때, 다음에 답하여라.

(1) 6^{50}은 몇 자리의 정수인지 구하여라.

(2) 3^{-40}은 소수점 아래 몇째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는지 구하여라.

풀이 (1) $\log 6^{50} = 50\log(2\times 3) = 50(0.3010 + 0.4771)$
$= 38.905$이므로 $\log 6^{50}$의 지표는 38이다. 즉 6^{50}은 39자리 정수이다.

(2) $\log 3^{-40} = -40\log 3 = -19.084 = \overline{20}.916$이므로 $\log 3^{-40}$의 지표는 -20이다. 즉 3^{-40}은 소수점 아래 20째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. □

예제 76. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$일 때, 다음 수의 최고 자릿수를 구하여라.

(1) $2^{40} \times 3^{20}$　　(2) $\left(\frac{5}{4}\right)^{30}$

풀이 (1) 주어진 수의 로그값을 계산하면

$$\begin{aligned}\log(2^{40}\times 3^{20}) &= \log 2^{40} + \log 3^{20} = 40\log 2 + 20\log 3 \\ &= 12.04 + 9.542 = 21.582\end{aligned}$$

이므로 $\log(2^{40}\times 3^{20})$의 가수는 0.582이다. 이때

$$\log 3 = 0.4771,\ \log 4 = 2\log 2 = 0.6020$$

이므로

$$\begin{aligned}&\log 3 < 0.582 < \log 4 \\ &\Rightarrow 21 + \log 3 < 21 + 0.582 < 21 + \log 4 \\ &\Rightarrow \log(3\times 10^{21}) < \log(2^{40}\times 3^{20}) < \log(4\times 10^{21}) \\ &\Rightarrow 3\times 10^{21} < 2^{40}\times 3^{20} < 4\times 10^{21}\end{aligned}$$

따라서 $2^{40}\times 3^{20}$의 최고 자릿수는 3이다.

(2) 주어진 수의 로그값을 계산하면

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{5}{4}\right)^{30} &= 30\log\frac{5}{4} = 30\log\frac{10}{8} = 30(\log 10 - \log 8) \\ &= 30(1 - 3\log 2) = 30(1 - 3\times 0.3010) = 2.91\end{aligned}$$

이므로 $\log\left(\frac{5}{4}\right)^{30}$의 가수는 0.91이다. 이때

$$\log 8 = 3\log 2 = 3\times 0.3010 = 0.9030,$$
$$\log 9 = 2\log 3 = 2\times 0.4771 = 0.9542$$

이다.

그러므로

$$\log 8 < 0.91 < \log 9$$
$$\Rightarrow 2+\log 8 < 2+0.91 < 2+\log 9$$
$$\Rightarrow \log(8\times 10^2) < \log\left(\frac{5}{4}\right)^{30} < \log(9\times 10^2)$$
$$\Rightarrow 8\times 10^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^{30} < 9\times 10^2$$

따라서 $\left(\frac{5}{4}\right)^{30}$의 최고 자릿수는 8이다. □

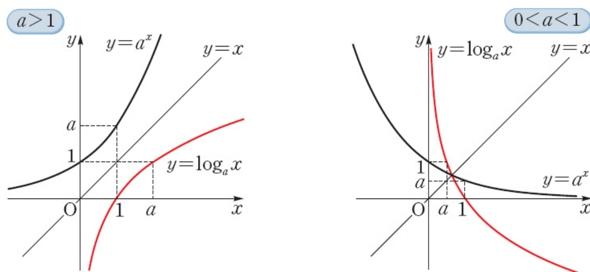
지수함수 $y=a^x$의 역함수를 $y=\log_a x$로 나타내고 a를 밑으로 하는 **로그함수**라고 부른다. (단, $a>0$, $a\neq 1$)

즉 지수함수와 로그함수는 다음과 같은 관계를 가진다.

① $y=\log_a x \iff x=a^y$

② 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이다.

로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



로그함수 $y=\log_a x$의 성질 (단, $a>0$, $a\neq 1$)

(1) 정의역은 양의 실수 전체 집합이고 치역은 실수 전체 집합이다.

(2) 점 $(1,\ 0)$과 $(a,\ 1)$를 지나고, y축이 점근선이다.

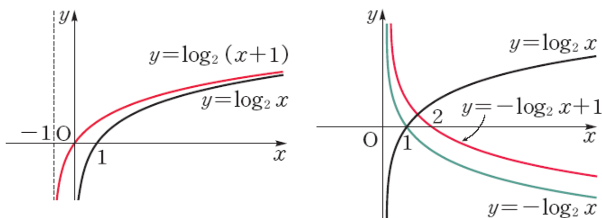
(3) $a>1$일 때 증가하는 그래프이고
$0<a<1$일 때 감소하는 그래프이다.

예제 77. 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=\log_2(x+1)$ (2) $y=-\log_2 x+1$

풀이 (1) 함수 $y=\log_2(x+1)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

(2) 함수 $y=-\log_2 x+1$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



예제 78. 다음 두 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\log_2 10,\ 2\log_2 3$ (2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 6,\ \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 8$

풀이 (1) $2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$

함수 $y=\log_2 x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $10>9$이므로 $\log_2 10>\log_2 9$.

(2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 6=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{6}$, $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 8=\log_{\frac{1}{3}} 2$.

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $\sqrt{6}>2$이므로 $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{6}<\log_{\frac{1}{3}} 2$. □

로그함수의 최대 · 최소

함수 $y=\log_a f(x)$에서

① $a>1$일 때 $f(x)$가 최대이면 $y=\log_a f(x)$도 최대이고, $f(x)$가 최소이면 $y=\log_a f(x)$도 최소이다.

② $0<a<1$일 때 $f(x)$가 최소이면 $y=\log_a f(x)$는 최대이고, $f(x)$가 최대이면 $y=\log_a f(x)$는 최소이다.

단, $y=(\log_a x)^2+\log_a x^n+m$의 형태이면 $\log_a x=t$로 치환하여 이차함수의 최대 · 최소를 구한다.

예제 79. 주어진 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=\log_2(x+2)$ $(0\le x\le 6)$

(2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)$ $\left(\frac{5}{9}\le x\le 1\right)$

풀이 (1) 밑이 $2>1$이므로 $x+2$의 값이 최대일 때 함숫값도 최대이고, $x+2$의 값이 최소일 때 함숫값도 최소이다. $0\le x\le 6$의 범위에서 $x+2$의 최댓값은 8, 최솟값은 2이므로

y의 최댓값은 $\log_2(6+2)=\log_2 8=3$,

y의 최솟값은 $\log_2(0+2)=\log_2 2=1$.

(2) 밑이 $\frac{1}{3}<1$이므로 $2x-1$의 값이 최대일 때 함숫값은 최소이며, $2x-1$의 값이 최소일 때 함숫값은 최대이다.

y의 최댓값은 $\log_{\frac{1}{3}}\left(2\cdot\frac{5}{9}-1\right)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9}=2$,

y의 최솟값은 $(\log_{\frac{1}{3}} 2\cdot 1-1)=\log_{\frac{1}{3}} 1=0$. □

예제 80. 주어진 범위에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x+5$ $(1\le x\le 8)$

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{x}$ $\left(\frac{1}{4}\le x\le 2\right)$

풀이 (1) $\log_2 x=t$로 두자.

$1\le x\le 8$에서 $\log_2 1\le\log_2 x\le\log_2 8$이므로 $0\le t\le 3$이다.

이때 주어진 함수는 $y=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$이다.

따라서 $0\le t\le 3$에서 $(t-1)^2+4$의 최댓값은 8, 최솟값은 4이다.

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}x\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{x}=\log_{\frac{1}{2}}x(\log_{\frac{1}{2}}4-\log_{\frac{1}{2}}x)$

$\quad=\log_{\frac{1}{2}}x(-2-\log_{\frac{1}{2}}x)=-(\log_{\frac{1}{2}}x)^2-2\log_{\frac{1}{2}}x.$

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$로 두면 $\frac{1}{4}\le x\le 2$에서

$$\log_{\frac{1}{2}}2\le\log_{\frac{1}{2}}x\le\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$$

이므로 $-1\le t\le 2$이다.
이때 주어진 함수는 $y=-t^2-2t=-(t+1)^2+1$이다.
따라서 $-1\le t\le 2$에서 $-(t+1)^2+1$의 최댓값은 1, 최솟값은 -8이다. □

로그방정식

(1) $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ 꼴의 방정식은 $f(x)=g(x)$를 푼다. (단, $f(x)>0$, $g(x)>0$)
(2) $\log_a f(x)=\log_b g(x)$ 꼴의 방정식은 밑을 통일하고 (1)과 같이 푼다.
(3) $\log_a x$, $(\log_a x)^2$이 포함된 식은 $\log_a x=t$로 치환한다.
(4) $\{f(x)\}^{\log x}$와 같이 지수에 로그가 있을 때에는 양변에 로그를 취한다.

예제 81. 다음 로그방정식을 풀어라.

(1) $\log_2(2x-1)=\log_2 x^2$ (2) $\log_2(6-x)=2\log_4 x$
(3) $\log_3(x-1)=2$ (4) $(\log x)^2-3\log x=0$

풀이 (1) 진수의 조건에서 $2x-1>0$, $x^2>0$이므로 $x>\frac{1}{2}$.
한편 $\log_2(2x-1)=\log_2 x^2$에서 $2x-1=x^2$이므로 $x=1$.
따라서 답은 $x=1$.

(2) 진수의 조건에서 $6-x>0$, $x>0$이므로 $0<x<6$.
한편 $\log_2(6-x)=2\log_4 x$에서 $\log_2(6-x)=\log_2 x$이므로 $x=3$. 따라서 답은 $x=3$.

(3) $\log_3(x-1)=2$에서 $x-1=3^2=9$. 따라서 $x=10$.

(4) $(\log x)^2-3\log_x=0$에서 $\log x=t$라고 하면
$t^2-3t=0$, $t(t-3)=0$이므로 $t=0$ 또는 $t=3$.
즉 $\log x=0$ 또는 $\log x=3$이므로
답은 $x=1$ 또는 $x=1000$. □

예제 82. 로그방정식 $(\log_2 x)^2-3\log_x x-5=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

풀이 $\log_2 x=t$라고 두면 주어진 방정식은 $t^2-3t-5=0$이 된다. 이 이차방정식의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$가 된다. 따라서 이 차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\log_2\alpha+\log_2\beta=3$이므로 $\log_2\alpha\beta=\log_2\alpha+\log_2\beta=3$이다. 이것을 풀면 $\alpha\beta=2^3=8$을 얻는다. □

예제 83. 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^{\log x}=1000x^2$
(2) $2^{\log x}\cdot x^{\log 2}-3(2^{\log x}+x^{\log 2})-16=0$

풀이 (1) 양변에 상용로그를 취하면 $\log x^{\log x}=\log 1000x^2$.
이것을 변형하면 $(\log x)^2-2\log x-3=0$.
$\log x=t$로 두면 $t^2-2t-3=0$.
이것을 풀면 $t=-1$ 또는 $t=3$.
즉 $\log x=-1$ 또는 $\log x=3$이므로 $x=\frac{1}{10}$ 또는 $x=1000$.
(2) $x^{\log 2}=2^{\log x}$를 이용하여 주어진 식을 변형하면
$(2^{\log x})^2-6\cdot 2^{\log x}-16=0$. 여기서 $2^{\log x}=t$로 두면
$t^2-6t-16=0$. 이것을 풀면 $t=-2$ 또는 $t=8$.
그런데 $t>0$이므로 $t=8$. 즉 $2^{\log x}=8$이므로 $2^{\log x}=2^3$.
$\log x=3$. 답은 $x=1000$. □

로그부등식

(1) $\log_a f(x)<\log_a g(x)$은 $a>1$이면 $0<f(x)<g(x)$를 풀고 $0<a<1$이면 $f(x)>g(x)>0$을 푼다.
(2) 밑이 다를 때에는 밑을 통일한다.
(3) $\log_a x$, $(\log_a x)^2$이 포함된 식은 $\log_a x=t$로 치환한다.
(4) 밑이 문자일 때에는 (밑)>1, $0<$(밑)<1의 두 가지 경우로 나누어 생각한다.

예제 84. 다음 부등식을 풀어라.

(1) $\log_4(x-1)>\log_2(x-3)$
(2) $\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\le -1$

풀이 (1) 진수의 조건에서 $x-1>0$, $x-3>0$이므로
$x>1$ 그리고 $x>3$이다. 따라서 $x>3$이다. … ①
한편 주어진 부등식을 변형하면

$$\log_2(x-1)>\log_2(x-3)^2$$

이다. (밑)$=2>1$이므로 $(x-1)>(x-3)^2$이다.
이것을 풀면 $2<x<5$이다. … ②
①, ②의 공통범위를 구하면 $3<x<5$이다.
(2) 진수의 조건에서 $x>0$, $x-2>0$이므로 $x>2$이다. … ①
주어진 부등식을 변형하면

$$\log_{\frac{1}{3}}x(x-2)\le\log_{\frac{1}{3}}3$$

이다. (밑)$=\frac{1}{3}<1$이므로 $x(x-2)\ge 3$이다.
이것을 풀면 $x\le -1$ 또는 $x\ge 3$이다. … ②
①, ②의 공통범위를 구하면 $x\ge 3$이다. □

예제 85. 부등식 $(\log_2 x)^2<6-\log_2 x^5$를 풀어라.

풀이 진수의 조건에서 $x>0$. … ①
한편 $\log_2 x=t$로 두면 주어진 부등식은

$$t^2+5t-6<0$$

이 된다. 이 부등식을 풀면 $-6<t<1$이므로

$$\log_2 2^{-6}<\log_2 x<\log_2 2$$

즉 $\frac{1}{64}<x<2$이다. … ②

①, ②의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{64}<x<2$이다. □

예제 86. 부등식 $x^{\log x}<100x$의 해를 구하여라.

풀이 진수의 조건에서 $x>0$. … ①

주어진 부등식의 양변에 로그를 취하면 $\log x^{\log x}<\log 100x$.

이 식을 변형하면 $\log x\cdot\log x<\log 100+\log x<0$이므로

$$(\log x)^2-\log x-2<0.$$

$\log x=t$로 두면 $t^2-t-2<0$이고

이것을 풀면 $\frac{1}{10}<x<100$. … ②

①, ②의 공통범위를 구하면 $\frac{1}{10}<x<100$. □

12 등차수열과 등비수열

정의역이 자연수 집합인 함수를 **수열**이라고 부른다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}$$

이 성립한다.

첫째항부터 차례로 일정한 수를 더하여 얻어지는 수열을 **등차수열**이라고 하고, 더하는 일정한 수를 **공차**라고 부른다.

등차수열의 일반항

(1) 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열의 일반항은

$$a_n=a+(n-1)d.$$

(2) 세 수 a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이룰 때 b를 a와 c의 등차중항이라고 부른다. 이때

$$b=\frac{a+c}{2}$$

가 성립한다.

예제 87. 다음 등차수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) 첫째항이 10, 공차가 4 (2) 1, 4, 7, 10, 13, ⋯

(3) 20, 15, 10, 5, 0, ⋯ (4) 첫째항이 2, 둘째항이 -1

풀이 (1) $a_n=4n+6$ (2) $a_n=3n-2$

(3) $a_n=-5n+25$ (4) $a_n=-3n+5$ □

예제 88. 두 수 2와 20 사이에 5개의 수를 넣어서 만든 수열

$$2,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ 20$$

이 이 순서로 등차수열을 일루 때, x_4의 값을 구하여라.

풀이 공차를 d, 일반항을 a_n이라고 하고 첫째항을 2라고 하면

$$a_n=2+(n-1)d$$

이때 $a_7=20$이므로 $a_7=2+6d=20$이다. 즉 $d=3$이다. 따라서 일반항은 $a_n=3n-1$이다.

x_4는 제5항이므로 $x_4=a_5=3\cdot5-1=14$. □

예제 89. 등차수열을 이루는 세 수의 합이 15, 곱이 105일 때, 이 세 수를 구하여라.

풀이 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라고 하면 $3a=15$이므로 $a=5$이다. 또한 곱에 105이므로 $(5-d)\cdot5\cdot(5+d)=105$이다. 이것을 풀면 $d=\pm2$이다. 따라서 구하는 세 수는 3, 5, 7이다. □

등차수열의 합

(1) 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열이 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}.$$

(2) 첫째항이 a, 끝항이 l, 항의 수가 n인 등차수열의 모든 항의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}.$$

증명 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S라고 하면

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+\{a+(n-1)d\},$$
$$S=\{a+(n-1)d\}+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$$

이므로 등식을 변변 더하면

$$2S=n\{2a+(n-1)d\}$$

이다. 따라서 합은 다음과 같다.

$$S=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$ ■

예제 90. 다음에 답하여라.

(1) 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제9항까지의 합을 구하여라.

(2) 첫째항이 7, 끝항이 -14, 항의 개수가 8인 등차수열의 합을 구하여라.

풀이 (1) $S_9=\frac{9\{2\cdot2+(9-1)\cdot3\}}{2}=126$.

(2) $S_8=\frac{8\{7+(-14)\}}{2}=\frac{8\cdot(-7)}{2}=-28$. □

예제 91. 다음 수열의 합을 구하여라.

(1) $4+7+10+\cdots+31$

(2) $20+15+10+\cdots+(-50)$

풀이 (1) 일반항을 구하면 $a_n=3n+1$. 문제의 합은 제10항까지의 합이므로

$$S_{10}=\frac{10(4+31)}{2}=175.$$

(2) 일반항을 구하면 $a_n=-5n+25$. 따라서 문제의 합은 제15항까지의 합이므로

$$S_{15}=\frac{15\{20+(-50)\}}{2}=-225.$$ □

예제 92. 첫째항이 30, 공차가 -4인 등차수열에서 첫째항부터 제 몇 항까지의 합이 최대가 되는지 구하고, 그때의 최댓값을 구하여라.

풀이 $S_n = \dfrac{n\{2\cdot 30+(n-1)(-4)\}}{2} = -2(n-8)^2+128.$

따라서 $n=8$일 때, 즉 제8항까지의 합이 최대가 되고, 그때의 최댓값은 128이다. □

예제 93. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n=-2n^2+3n+1$이다. 이때 일반항 a_n을 구하여라.

풀이 $n\geq 2$일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = -4n+5 \qquad \cdots ①$$

이다. $n=1$일 때 $a_1=S_1=2$이고 이것은 ①에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 다르므로 구하는 일반항은

$$a_1=2,\ a_n=-4n+5\ (n\geq 2).$$ □

어떤 수에 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어진 수열을 **등비수열**이라고 부르며, 이때 곱한 수를 **공비**라고 부른다.

> **등비수열의 일반항**
> (1) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항은
> $$a_n = ar^{n-1}.$$
> (2) 세수 a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이룰 때 b를 a와 c의 등비중항이라고 부른다. 이때
> $$b^2=ac \quad \text{그리고} \quad |b|=\sqrt{ac}$$
> 가 성립한다.

예제 94. 다음 등비수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) 첫째항이 4, 공비가 -1 (2) 첫째항이 5, 공비가 $\dfrac{1}{2}$

(3) 3, 6, 12, 24, $\cdots$ (4) 1, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{1}{8}$, $\cdots$

풀이 (1) $a_n = 4\cdot(-1)^{n-1}$ (2) $a_n = 5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3) $a_n = 3\cdot 2^{n-1}$ (4) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ □

예제 95. 다음 물음에 답하여라.

(1) 등비수열 -2, 6, -18, 54, $\cdots$에서 486은 제 몇 항인지 구하여라.

(2) 공비가 2, 제5항이 160인 등비수열의 첫째항을 구하여라.

풀이 주어진 등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r이라고 하자.

(1) $a=-2$, $r=-3$이므로 $a_n=-2\cdot(-3)^{n-1}$이다.

486을 제n항이라 하면 $-2\cdot(-3)^{n-1}=486$이므로 $n=6$이다. 따라서 486은 제6항이다.

(2) $r=2$이므로 $a_n=a\cdot 2^{n-1}$이다. 제5항이 160이므로 $a\cdot 2^4=160$이다. 따라서 $a=10$이다. 즉 구하는 첫째항은 10이다. □

예제 96. 두 수 5와 80 사이에 세 양수를 넣어 만든 수열

$$5,\ x,\ y,\ z,\ 80$$

이 이 순서로 등비수열을 이룰 때 x, y, z를 각각 구하여라.

풀이 공비를 r, 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=5r^{n-1}$.

이때 $a_5=80$이므로 $5r^4=80$ 즉 $r=2$이다.

따라서 $a_n=5\cdot 2^{n-1}$이다.

$x=a_2=10$, $y=a_3=20$, $z=a_4=40$. □

예제 97. 등비수열을 이루는 세 실수의 합이 21이고 곱이 216일 때, 이 세 수 중 가장 큰 수를 구하여라.

풀이 등비수열을 이루는 세 수를 a, ar, ar^2이라고 하자.

세 수의 합이 21이므로 $a+ar+ar^2=21$. 즉

$$a(1+r+r^2)=21 \qquad \cdots ①$$

이다. 한편 세 수의 곱이 216이므로 $a\cdot ar\cdot ar^2=216$. 즉

$$ar=6 \qquad \cdots ②$$

이다. ①, ②를 연립하여 풀면

$$\begin{cases} r=\dfrac{1}{2} \\ a=12 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} r=2 \\ a=3 \end{cases}$$

이다. 어느 경우에나 구하는 세 수는 3, 6, 12이다. 따라서 가장 큰 수는 12이다. □

예제 98. 세 양수 8, a, b가 이 순서로 등차수열을 이루고, a, b, 36이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값을 구하여라.

풀이 등차수열의 조건에 의하여 $2a=8+b$.

등비수열의 조건에 의하여 $b^2=36a$.

두 식을 연립하여 풀면 $a=16$, $b=24$. □

> **등비수열의 합**
> 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면
> ① $r\neq 1$일 때 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$.
> ② $r=1$일 때 $S_n=na$.

증명 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S라고 하면 $r\neq 1$일 때

$$S=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1},$$
$$rS=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n$$

이므로 등식을 변변 빼면

$$(1-r)S=a-ar^n$$

이다. 따라서 합은 다음과 같다.

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

한편 $r=1$일 때의 합은 다음과 같다.

$$S=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=na$$ ■

예제 99. 다음 수열의 합을 구하여라.

(1) $1+\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}+\cdots+27$

(2) $9+99+999+\cdots+9999999$

풀이 (1) 일반항은 $a_n=(\sqrt{3})^{n-1}$.

이때 $a_n=27$을 풀면 $n=7$을 얻는다.

따라서 제1항부터 7항까지의 합을 구하면

$$S_7=\frac{1\cdot\{(\sqrt{3})^7-1\}}{\sqrt{3}-1}=40+13\sqrt{3}.$$

(2) $9+99+999+\cdots+9999999$

$=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^7-1)$

$=(10+10^2+10^3+\cdots+10^7)-7$

$=11111110-7=11111103.$ □

예제 100. 첫째항부터 제10항까지의 합이 10, 첫째항부터 제20항까지의 합이 30인 등비수열에서 첫째항부터 제30항까지의 합을 구하여라.

풀이 첫째항을 a, 공비를 r, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_{10}=10$에서 $\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}=10,$

$S_{20}=30$에서 $\dfrac{a(1-r^{20})}{1-r}=\dfrac{a(1-r^{10})(1+r^{10})}{1-r}=30$

두 식을 연립하면 $10(1+r^{10})=30$이므로 $r^{10}=2$이다. 따라서

$S_{30}=\dfrac{a(1-r^{30})}{1-r}=\dfrac{a(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20})}{1-r}$

$=\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}\cdot(1+r^{10}+r^{20})=10(1+2+2^2)=70.$ □

예제 101. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 $S_n=2^{n+1}+k$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루도록 상수 k의 값을 정하여라.

풀이 $n\ge 2$일 때 $a_n=S_n-S_{n-1}=2^n$. … ①

$n=1$일 때 $a_1=S_1=4+k$ … ②

수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ①에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 ②가 같아야 한다. 따라서 $k=-2$이다. □

예제 102. 300만 원을 연이율 6%로 20년 동안 1년마다 복리로 예금할 경우 원리합계를 구하여라. (단, $1.06^{20}=3.21$로 계산한다.)

풀이 $300(1+0.06)^{20}=300\times1.06^{20}$

$=300\times3.21=963$(만 원) □

예제 103. 연이율 5%로 1년마다 복리로 매년 초에 100만 원씩 적립할 때, 10년 후 연말의 적립금의 원리합계를 구하여라.

풀이 $100(1+0.05)+100(1+0.05)^2+\cdots+100(1+0.05)^{10}$

$=\dfrac{100(1+0.05)\{(1+0.05)^{10}-1\}}{(1+0.05)-1}$

$=\dfrac{100\times1.05(1.63-1)}{0.05}=1323$(만 원) □

13 여러 가지 수열

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n을

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

로 나타낸다.

합의 기호의 성질

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (c는 상수)

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=nc$ (c는 상수)

예제 104. 다음을 기호 $\sum$를 사용하지 않고 수열의 각 항의 합의 꼴로 나타내어라.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(-k)^3$ (2) $\displaystyle\sum_{m=3}^{9}(4m-3)$ (3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}i(i+1)$

풀이 (1) $-1-8-27-\cdots-1000$

(2) $9+13+17+\cdots+33$

(3) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+20\cdot21$ □

예제 105. 다음을 합의 기호를 사용하여 나타내어라.

(1) $1+3+5+7+\cdots+27$

(2) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^9}$

(3) $2+\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{4}+\cdots+\dfrac{20}{19}$

풀이 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{14}(2k-1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ 또는 $\displaystyle\sum_{k=0}^{19}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{19}\frac{k+1}{k}$ 또는 $\displaystyle\sum_{k=2}^{20}\frac{k}{k-1}$ □

여러 가지 수열의 합

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

증명 (2) $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$에 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$을 차례로 대입하면

$$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1,$$
$$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1,$$
$$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1,$$
$$\vdots$$
$$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$$

이므로 등식을 변변 더하면

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

이다. 이 식을 변형하면 다음을 얻는다.

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3) $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$에 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$을 차례로 대입하여 (2)와 같은 방법으로 공식을 유도한다. ■

참고 $\sum_{k=1}^{10}a_k$에서 k는 다른 문자로 바뀌어도 동일하다. 즉

$$\sum_{k=1}^{10}a_k,\ \sum_{n=1}^{10}a_n,\ \sum_{i=1}^{10}a_i$$

는 모두 동일한 의미를 나타내는 식이다.

예제 106. 다음을 계산하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)$ (2) $\sum_{k=1}^{5}(4k^3-7k^2)$

풀이 (1) $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1=2\cdot\frac{10(10+1)}{2}-10$

$=110-10=100$

(2) $\sum_{k=1}^{5}(4k^3-7k^2)=4\sum_{k=1}^{5}k^3-7\sum_{k=1}^{5}k^2$

$=4\left\{\frac{5(5+1)}{2}\right\}^2-7\cdot\frac{5(5+1)(2\cdot5+1)}{6}$

$=900-385=515$ □

참고 합 기호에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

그러나 곱은 따로 떨어지지 않는다. 즉

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)\neq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$$

이다.

예제 107. 다음 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구하여라.

(1) $\frac{1}{1\cdot3},\ \frac{1}{3\cdot5},\ \frac{1}{5\cdot7},\ \frac{1}{7\cdot9},\ \cdots$

(2) $\frac{1}{1},\ \frac{1}{1+2},\ \frac{1}{1+2+3},\ \frac{1}{1+2+3+4},\ \cdots$

풀이 (1) $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$ □

수열 $\{a_n\}$에서 이웃한 두 항의 차 $b_n=a_{n+1}-a_n$을 **계차**라고 부르고, 이 계차들로 이루어진 수열 $\{b_n\}$을 $\{a_n\}$의 **계차수열**이라고 부른다.

계차수열을 이용한 수열의 일반항

수열 $\{a_n\}$의 계차수열이 $\{b_n\}$일 때

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\quad(n\geq2)$$

증명 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$b_n=a_{n+1}-a_n$$

이라고 하자. 그러면

$a_2=a_1+b_1$,

$a_3=a_2+b_2=a_1+b_1+b_2$,

$a_4=a_3+b_3=a_1+b_1+b_2+b_3$,

$\vdots$

$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}=a_1+\sum_{k=1}^{n-2}b_k+b_{n-1}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$. ■

예제 108. 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$이 1, 3, 5, 7일 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라. (단, $a_1=1$)

풀이 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$b_n=2n-1$$

이다. 따라서

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$
$$=1+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)=n^2-2n+2\ (n\geq2)$$

이다. 이것은 $n=1$일 때에도 성립하므로 $a_n=n^2-2n+2$. □

예제 109. 수열

$$2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 17,\ 33,\ \cdots$$

의 일반항 a_n과 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n을 구하여라.

풀이 계차수열 $\{b_n\}$의 항을 나열하면

$$b_1=3-2=1,$$
$$b_2=5-3=2,$$
$$b_3=9-5=4,$$
$$b_4=17-9=8,$$
$$\vdots$$

이므로 $\{b_n\}$은 공비가 2인 등비수열임을 알 수 있다. 즉

$$b_n=2^{n-1}$$

이다. 따라서

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=2^{n-1}+1$$

이고

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^{k-1}+1)=2^n+n-1$$

이다. □

주어진 수열에서 몇 개씩의 항을 적당히 묶어 규칙성을 가진 군으로 나눌 수 있는 수열을 **군수열**이라고 부른다.

> **군수열을 이용하는 문제의 풀이**
> (1) 규칙성을 가진 군으로 나눈다.
> (2) 찾고자 하는 항이 제 몇 군의 몇째 항인지 알아낸다.
> (3) 각 군의 첫째항이 갖는 규칙성 및 각 군의 항의 수를 파악한다.

예제 110. 다음 수열의 제 100항을 구하여라.

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

풀이 주어진 수열을 각 군의 첫째항이 1이 되도록 묶으면

$$\underset{\text{제1군}}{(1)},\ \underset{\text{제2군}}{(1,\ 2)},\ \underset{\text{제3군}}{(1,\ 2,\ 3)},\ \underset{\text{제4군}}{(1,\ 2,\ 3,\ 4)},\ \underset{\text{제5군}}{(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)},\ \underset{\cdots}{\cdots}$$

제 n군의 항수는 n이므로 제1군부터 제n군까지의 항수는

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

이다. 따라서 제1군부터 제13군까지의 항수는 91, 제14군까지의 항수는 105이므로, 제100항은 제14군의 9번째 항이다.

이때 각 군은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열로 이루어져 있으므로 제 100항은 $1+(9-1)\cdot 1=9$이다. □

14 수학적 귀납법과 점화식

도미노는 여러 개의 골패를 적당히 배치하고 하나를 넘어뜨려 모든 골패가 넘어지도록 하는 놀이이다.



전체 골패가 넘어지려면 다음과 같은 두 가지 조건이 만족되어야 한다. 첫째, 하나의 골패가 넘어지면 그 다음 골패가 넘어져야 한다. 둘째, 누군가는 첫 번째 골패를 넘어뜨려야 한다.

이와 같은 원리를 증명에 적용한 것이 수학적 귀납법이다.

> **수학적 귀납법**
> 자연수 n에 관한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명할 때에는 다음 두 가지를 밝히면 된다.
> ① $n=1$일 때 $p(n)$이 성립한다.
> ② $n=k$일 때 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 $p(n)$이 성립한다.

예제 111. 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

풀이 (i) $n=1$일 때 ㉠에서

$$(\text{좌변})=1^2=1,\ (\text{우변})=\frac{1\cdot(4\cdot 1^2-1)}{3}=1$$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{k(4k^2-1)}{3}$$

이다. $n=k+1$일 때

$$\begin{aligned}
&1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+\{2(k+1)-1\}^2\\
&=\frac{k(4k^2-1)}{3}+\{2(k+1)-1\}^2\\
&=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}+(2k+1)^2\\
&=\frac{(2k+1)}{3}\{k(2k-1)+3(2k+1)\}\\
&=\frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}\\
&=\frac{(2k+1)(2k+3)(k+1)}{3}\\
&=\frac{(k+1)(4k^2+8k+3)}{3}\\
&=\frac{(k+1)\{4(k+1)^2-1\}}{3}.
\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다. □

예제 112. $n \geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n > 2^n \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

풀이 (i) $n=4$일 때 ㉠에서

$$(좌변)=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,\ (우변)=2^4=16$$

이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k \geq 4)$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k > 2^k$$

이다. $n=k+1$일 때,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k \cdot (k+1) > 2^k \cdot (k+1) > 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다. □

일반적으로 첫째항의 값과 이웃하는 두 항 사이의 관계식이 정해지면 모든 항의 값이 정해진다. 이와 같이 수열을 정의하는 방법을 수열의 **귀납적 정의**라고 부르고, 두 항 사이의 관계식을 **점화식**이라고 부른다.

여러 가지 수열의 귀납적 정의

(1) 첫째항이 a이고 공차가 d인 등비수열은

$$a_1=a,\ a_{n+1}-a_n=d.$$

(2) 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열은

$$a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n.$$

예제 113. 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제4항을 구하여라.

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+2n$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3^n$

풀이 (1) $a_{n+1}=a_n+2n$에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2 \cdot 1=3+2=5,$

$a_3=a_2+2 \cdot 2=5+4=9,$

$a_4=a_3+2 \cdot 3=9+6=15.$

(2) $a_{n+1}=a_n+3^n$의 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+3^1=1+3=4,$

$a_3=a_2+3^2=4+9=13,$

$a_4=a_3+3^3=13+27=40.$ □

예제 114. 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1=5,\ a_{n+1}=a_n+10$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n$

(3) $a_1=1,\ a_2=3,\ 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

(4) $a_1=4,\ a_2=2,\ (a_{n+1})^2=a_n a_{n+2}$

풀이 (1) $\{a_n\}$은 공차가 10인 등차수열이다. 이때 첫째항이 5이므로

$$a_n=5+(n-1) \cdot 10=10n-5.$$

(2) $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다. 이때 첫째항이 2이므로

$$a_n=2 \cdot 3^{n-1}.$$

(3) $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 $\{a_n\}$은 등차수열이다. 이때 첫째항이 1, 공차가 $a_2-a_1=2$이므로

$$a_n=1+(n-1) \cdot 2=2n-1.$$

(4) $(a_{n+1})^2=a_n a_{n+2}$이므로 $\{a_n\}$은 등비수열이다. 첫째항이 4, 공비가 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1}{2}$이므로

$$a_n=4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$ □

여러 가지 점화식

(1) $a_{n+1}=a_n+f(n)$의 꼴로 정의된 수열의 일반항은

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

(2) $a_{n+1}=f(n)a_n$의 꼴로 정의된 수열의 일반항은

$$a_n=a_1 f(1) f(2) f(3) \cdots f(n-1).$$

(3) $a_{n+1}=pa_n+q$의 꼴로 정의되었을 때 $\{a_n-\alpha\}$는 첫째항이 $a_1-\alpha$이고 공비가 p인 등비수열이 된다.

예제 115. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+2n$$

으로 정의되었을 때 일반항 a_n을 구하여라.

풀이 $a_{n+1}-a_n=2n$이므로 계차수열은 $b_n=2n$이다. 따라서

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=3+2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}=n^2-n+3.$$ □

예제 116. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$$

으로 정의되었을 때 일반항 a_n을 구하여라.

풀이 $a_2=\dfrac{1}{2}a_1,$

$$a_3=\frac{2}{3}a_2=\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}a_1=\frac{1}{3}a_1,$$

$$a_4=\frac{3}{4}a_3=\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}a_1=\frac{1}{4}a_1,$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{n-1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}a_1=\frac{1}{n}.$$

사실 수학적 귀납법을 이용하면

(i) $a_1=1$

(ii) $a_k=\dfrac{1}{k} \Rightarrow a_{k+1}=\dfrac{k}{k+1}a_k=\dfrac{k}{k+1} \cdot \dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k+1}$

이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{1}{n}$임을 알 수 있다. □

예제 117. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 4a_n + 3$$

으로 정의되었을 때 일반항 a_n을 구하여라.

풀이 주어진 식 $a_{n+1} = 4a_n + 3$을 변형하면

$$a_{n+1} + 1 = 4(a_n + 1)$$

이다. [$a_{n+1} - \alpha = 4(a_n - \alpha)$라고 하고 전개한 뒤 α를 구해주는 방식으로 위 식을 얻을 수 있다.] 따라서 $A_n = a_n + 1$이라고 하면 $\{A_n\}$은 공비가 4인 등비수열이다. 또한 $A_1 = a_1 + 1 = 3$이므로 $\{A_n\}$의 첫째항은 3이다. 따라서

$$A_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

이다. 그런데 $A_n = a_n + 1$이므로

$$a_n = A_n - 1 = 3 \cdot 4^{n-1} - 1$$

이다. □

미분과 적분

Sooji Shin • soojishin@live.com

이 노트에서는 고등학교에서 배우는 수학의 내용 중 미적분에 관련된 개념과 공식을 정리하고 그에 따른 예제와 풀이를 소개합니다. 이 노트에서 포함하고 있는 내용은 다음과 같습니다.

- 수열의 극한
- 함수의 극한과 연속함수
- 미분의 뜻과 성질
- 적분의 뜻과 성질
- 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 미적분
- 미분과 적분의 활용

이 노트가 수학을 공부하는 분들께 도움이 되기를 바랍니다.

1 수열의 극한

수열의 극한은 수렴하는 경우와 발산하는 경우로 나눌 수 있으며, 발산하는 경우는 양의 무한대로 발산하는 경우, 음의 무한대로 발산하는 경우, 진동하는 경우로 나눌 수 있다.

수렴하는 수열 무한수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 **α에 수렴한다**고 말하고, α를 무한수열 $\{a_n\}$의 **극한값**이라고 부르며, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

로 나타낸다. 이것을 풀어서

$$n \to \infty \text{일 때 } a_n \to \alpha$$

로 쓰기도 한다.

무한대에 발산하는 수열 n의 값이 한없이 커짐에 따라 a_n의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 **양의 무한대로 발산한다**고 말하고 기호로는

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

또는

$$n \to \infty \text{일 때 } a_n \to \infty$$

로 나타낸다. 또 n의 값이 한없이 커짐에 따라 a_n의 값은 음의 값으로서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 **음의 무한대로 발산한다**고 말하고 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

또는

$$n \to \infty \text{일 때 } a_n \to -\infty$$

로 나타낸다.

진동하는 수열 수열 $\{(-1)^n\}$과 같이, $\{a_n\}$이 수렴하지도 않고 양의 무한대 또는 음의 무한대에 발산하지도 않을 때, 수열 $\{a_n\}$은 **진동한다**고 말한다.

수열의 극한의 기본성질

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

일 때, 다음이 성립한다.

① $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ (복부호동순)

② $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n$ (c는 상수)

③ $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

④ $a_n \neq 0,\ \alpha \neq 0$일 때 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\beta}{\alpha}$

참고 수열의 극한이나 함수의 극한의 성질을 증명하는 것은 고등학교 과정을 벗어나므로 여기서는 증명하지 않고 직관적으로 받아들인다.

예제 1. 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cdots,\ -\frac{1}{\sqrt{n}},\ \cdots$

(2) $1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \cdots,\ -n+2,\ \cdots$

(3) $\cos n\pi \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(4) $3n-1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

풀이 (1) 0에 수렴

(2) 음의 무한대로 발산

(3) 발산(진동)

(4) 양의 무한대로 발산 □

예제 2. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3,\ \lim_{n\to\infty} b_n = -2$$

일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}(2-a_n)$ (2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)$

(3) $\lim_{n\to\infty} 5a_n b_n$ (4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n+1}{(b_n)^2}$

풀이 (1) $2-3=-1$ (2) $3\cdot3-4\cdot(-2)=1$

(3) $5\cdot3\cdot(-2)=-30$ (4) $\frac{2\cdot3+1}{(-2)(-2)}=\frac{7}{4}$ □

예제 3. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{3}{n}\right)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{5}{n}\right)$　　(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{4}{n}}$

풀이 (1) $3+0=3$　　(2) $0-0=0$

(3) $(3-0)(2+0)=6$　　(4) $\frac{2+0}{1-0}=2$ □

부정형의 극한값

(1) $\{a_n\}$의 극한이 $\frac{\infty}{\infty}$꼴인 경우, a_n의 분모와 분자가 n에 관한 다항식이면 분자와 분모를 분모의 최고차항으로 나누어 계산한다.

(2) $\{a_n\}$의 극한이 $\infty-\infty$꼴인 경우, 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$꼴로 변형하여 구한다.

예제 4. 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n}{3n^2+2n-1}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2+1}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2-n}+3}$

풀이 (1) (준식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-\frac{2}{n}}{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=\infty$ (발산)

(2) (준식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0-0}{1+0}=0$ (수렴)

(3) (준식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\frac{3}{n}}=\frac{2+0}{1+0}=2$ (수렴) □

참고 A와 B가 n에 대한 다항식이고

$$a_n=\frac{A}{B}$$

일 때 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 수렴 여부는 다음과 같다.

(i) (A의 차수)>(B의 차수)인 경우 $\lim_{n\to\infty}a_n$은 발산한다.

A의 최고차항의 계수와 B의 최고차항의 계수의 부호가 동일하면 양의 무한대에 발산하고, 두 계수의 부호가 다르면 음의 무한대에 발산한다.

(ii) (A의 차수)<(B의 차수)인 경우 $\lim_{n\to\infty}a_n$은 0에 수렴한다.

(iii) (A의 차수)=(B의 차수)인 경우 $\lim_{n\to\infty}a_n$은 수렴한다.

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{(A\text{의 최고차항의 계수})}{(B\text{의 최고차항의 계수})}$. □

예제 5. 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$

(3) $\lim_{n\to\infty}(5+3n^2-2n^3)$

풀이 (1) (준식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{2}{1+1}=1$ (수렴)

(2) (준식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1}$

$=\frac{1+1}{1}=2$ (수렴)

(3) (준식)$=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{5}{n^3}+\frac{3}{n}-2\right)=-\infty$ (발산) □

극한의 대소 관계

(1) 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 α, β에 수렴하고 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n\le b_n\le c_n$$

이고 $\{a_n\}$과 $\{c_n\}$이 동일한 값 α에 수렴하면 $\{b_n\}$도 동일한 값 α에 수렴한다.

예제 6. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{n}{4n+5}<a_n<\frac{n+2}{4n+3}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

풀이 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n+5}=\frac{1}{4}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4n+3}=\frac{1}{4}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}.$$ □

예제 7. $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)\cos n\theta}{n^2}$의 값을 구하여라. (단, θ는 상수)

풀이 모든 자연수 n에 대하여

$$-\frac{n+n}{n^2}\le-\frac{1+n}{n^2}\le\frac{(1+n)\cos n\theta}{n^2}\le\frac{1+n}{n^2}\le\frac{n+n}{n^2}$$

이고 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2n}{n^2}\right)=0=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)\cos n\theta}{n^2}=0.$$ □

예제 8. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} < a_n < \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} na_n$의 값을 구하여라.

풀이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} < na_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} na_n = 1$이다. □

무한등비수열의 극한

무한등비수열 $\{r^n\}$의 극한은 다음과 같다.

① $r > 1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$,

② $r = 1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$,

③ $|r| < 1$일 때 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

④ $r \le -1$일 때 $\{r^n\}$은 진동한다.

증명 ① $r > 1$일 때 $r = 1+h$라고 하면 $h > 0$이다. 또한 이항정리에 의하여 $n \ge 2$일 때

$$r^n = (1+h)^n = 1 + nh + {}_nC_2 h^2 + \cdots \ge 1 + nh$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} r^n \ge \lim_{n\to\infty}(1+nh) = \infty.$$

②는 당연하다.

③ $r \ne 0$인 경우 $|r| = \frac{1}{1+h}$라고 하면 $h > 0$이다. 또한 이항정리에 의하여 $n \ge 2$일 때

$$|r|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \le \frac{1}{1+nh}$$

이므로

$$0 \le \lim_{n\to\infty}|r|^n \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+nh} = 0$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}|r|^n = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이다.

④ n이 짝수일 때 $r^n \ge 1$이고 n이 홀수일 때 $r^n \le -1$이므로 $\{r^n\}$은 하나의 값에 가까워지지 않으며 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하지도 않는다. ■

예제 9. 다음 무한등비수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$ (2) $\{(-2)^n\}$ (3) $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

풀이 (1) 0에 수렴 (2) 발산(진동) (3) 0에 수렴 □

예제 10. 다음 무한등비수열이 수렴하기 위한 실수 x의 값의 범위를 구하여라.

(1) $\{(2x-1)^n\}$ (2) $\left\{\left(\frac{x}{3}\right)^n\right\}$

풀이 (1) $-1 < 2x-1 \le 1$이므로 $0 < x \le 1$.

(2) $-1 < \frac{x}{3} \le 1$이므로 $-3 < x \le 3$. □

예제 11. 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^n}{5^n-1}$ (3) $\lim_{n\to\infty}(3^{2n}-3^n)$

풀이 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1$. (수렴)

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^n}{5^n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n+3^n}{5^n-1}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{2\cdot 0+0}{1-0} = 0.\ \text{(수렴)}$$

(3) $\lim_{n\to\infty}(3^{2n}-3^n) = \lim_{n\to\infty}(9^n-3^n) = \lim_{n\to\infty}9^n\left\{1-\left(\frac{3}{9}\right)^n\right\}$

$= \infty$. (발산) □

예제 12. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 3,\ 3a_{n+1} = a_n + 4 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의되었을 때 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

풀이 주어진 식을 변형하면

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}(a_n - 2)$$

이다. 따라서 $A_n = a_n - 2$라고 하면 $\{A_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로 0에 수렴한다. 따라서 $a_n = A_n + 2$이므로 $\{a_n\}$은 2에 수렴한다. 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$이다. □

2 급수

무한수열 $\{a_n\}$의 각 항을 합의 기호로 연결한 식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 **무한급수**라고 부르고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

으로 나타낸다. 이 무한급수에서 첫째항부터 제 n항까지의 합

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 무한급수의 **부분합**이라고 부른다.

만약 부분합 수열 $\{S_n\}$이 S에 수렴하면, 즉

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 **수렴한다**고 말하고, S를 이 **무한급수의 합**이라고 부르며 기호로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

또는

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

로 나타낸다.

만약 $\{S_n\}$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 **발산한다**고 말한다.

> **무한급수의 성질**
>
> 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 S, T에 수렴하면
>
> ① $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S \pm T$ (복부호동순)
>
> ② $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (c는 상수)

예제 13. 다음 무한급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $2+4+6+8+\cdots+2n+\cdots$

(2) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$

풀이 주어진 무한급수의 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하자.

(1) $S_n = 2+4+6+\cdots+2n = \frac{n(2+2n)}{2} = n^2+n$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(n^2+n) = \infty. \quad (\text{발산})$$

(2) $$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}\text{이므로}$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1. \quad (\text{수렴})$$ □

예제 14. 다음 무한급수의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

(2) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$

풀이 주어진 무한급수의 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하자.

(1) $$S_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$
$$\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{1}{2^n}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}.$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{2}\right)=\infty.$ (발산)

(2) $$S_{2^n} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^{2^n}}$$
$$\leq 1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^2}$$
$$=1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{4^2}+\frac{8}{8^2}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^2}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\leq 2.$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n \leq 2$이다. 즉 $\lim_{n\to\infty} S_n$은 양의 무한대로 발산하지는 않는다. 그런데 $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n}$이므로 $S_{n-1} \leq S_n$이다. 즉 n이 커지면 S_n도 커지므로 $\lim_{n\to\infty} S_n$은 음의 무한대로 발산하지도 않고 진동하지도 않는다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n$은 수렴한다. □

참고 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이고 부분합이 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$일 때,

$$\lim_{n\to\infty} S_n\text{이 수렴} \iff \lim_{n\to\infty} S_{2^n}\text{이 수렴}$$

이다. 여기서 2를 더 큰 자연수로 바꾸어도 성립한다. □

> **무한급수와 수열의 극한 사이의 관계**
>
> (1) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.
>
> (2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

증명 (1) 무한급수의 합을 S라고 하고 부분합을 S_n이라고 하자. 즉

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{그리고} \quad a_1+a_2+\cdots+a_n = S_n$$

이라고 하자. 그러면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

(2)는 (1)의 대우이므로 참이다. ■

예제 15. 다음 무한급수가 발산함을 보여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{n+5}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}$

풀이 (1) 일반항의 극한을 구해보면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n+5}=\infty\neq 0$$

이므로 주어진 무한급수는 발산한다.

(2) 일반항의 극한을 구해보면

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}=1\neq 0$$

이므로 주어진 무한급수는 발산한다. □

$a \neq 0$일 때, 첫째항이 a이고 공비가 r인 무한등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서 얻어진 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

를 첫째항이 a이고 공비가 r인 **무한등비급수**라고 부른다.

무한등비급수의 수렴과 발산

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은

① $|r| < 1$이면 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

② $|r| \geq 1$이면 발산한다.

증명 주어진 무한등비급수의 부분합은

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

이므로 $n \to \infty$인 극한을 취하면 원하는 결과를 얻는다. ■

예제 16. 다음 무한등비급수의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \cdots$ (2) $\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 4 + - \cdots$

풀이 (1) (공비의 절댓값)$= \frac{2}{5} < 1$이므로 수렴한다.

(2) (공비의 절댓값)$= |-\sqrt{2}| = \sqrt{2} > 1$이므로 발산한다. □

예제 17. 무한등비급수

$$1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + - \cdots$$

가 수렴하기 위한 실수 x의 값의 범위를 정하여라.

풀이 (공비의 절댓값)$= |3x| < 1$이므로 $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$. □

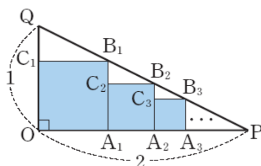
예제 18. 두 무한등비급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n, \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^n$$

이 모두 수렴하기 위한 x의 값의 범위를 구하여라.

풀이 $-1 < \frac{x}{4} < 1$과 $-1 < \frac{3}{x} < 1$을 모두 만족시키는 범위를 구하면 $-4 < x < -3$ 또는 $3 < x < 4$이다. □

예제 19. 아래 그림과 같이 $\overline{OP} = 2$, $\overline{OQ} = 1$이고 $\angle QOP = 90°$인 직각삼각형 OPQ에 정사각형 $OA_1B_1C_1$을 내접시키고, 다시 직각삼각형 A_1PB_1에 정사각형 $A_1A_2B_2C_2$를 내접시킨다.

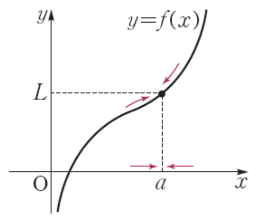


이와 같은 방법으로 정사각형을 계속 만들어 나갈 때, 이들 정사각형의 넓이의 합을 구하여라.

해설 가장 큰 정사각형의 넓이를 첫째 항으로 두고, 인접한 두 정사각형의 넓이의 비를 이용하여 공비를 구한다. □

3 함수의 극한

함수 $y = f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 **수렴**한다고 말한다.



이때 L을 x의 값 a에 한없이 가까워질 때의 함수 $f(x)$의 **극한값** 또는 **극한**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to L$$

과 같이 나타낸다.

예제 20. 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \to -2} (x-3)$ (2) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x+2}$

풀이 (1) x가 -2에 가까워지면 $x-3$은 $-2-3 = -5$에 가까워진다. 따라서 $\lim_{x \to -2} (x-3) = -5$이다.

(2) $x \neq -2$일 때

$$\frac{x^2 - x - 6}{x+2} = \frac{(x+2)(x-3)}{x+2} = x - 3$$

이므로 x가 -2에 가까워지면 $\frac{x^2-x-6}{x+2}$은 -5에 가까워진다.

따라서 $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x+2} = -5$이다. □

참고 위 예제에서 보는 바와 같이 한 점에서 함수의 극한은 그 점에서 함숫값과 관계가 없다. □

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 $f(x)$는 **양의 무한대로 발산**한다고 말하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to \infty$$

와 같이 나타낸다.

또 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 $f(x)$는 **음의 무한대로 발산한다**고 말하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to -\infty$$

와 같이 나타낸다.

예제 21. 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x \to -2} \frac{1}{(x+2)^2}$ (2) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{|x-2|}$

풀이 (1) x가 -2에 가까워질 때 $(x+2)^2$은 0에 가까운 양수이다. 즉 $\frac{1}{(x+2)^2}$의 분모가 0에 가까운 양수이므로 이 분수는 매우 커진다. 따라서 $\lim_{x \to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = \infty$이다.

(2) x가 2에 가까워질 때 $|x-2|$는 0에 가까운 양수이다. 즉 $\frac{1}{|x+2|}$의 분모가 0에 가까운 양수이므로 이 분수는 매우 커진다. 따라서 $\lim_{x\to 2}\frac{1}{|x-2|}=\infty$이다. □

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L \quad \text{또는} \quad x\to\infty\text{일 때 } f(x)\to L$$

과 같이 나타낸다.

또 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 음수이면서 절댓값이 한없이 커질 때 함수 $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=M \quad \text{또는} \quad x\to-\infty\text{일 때 } f(x)\to M$$

과 같이 나타낸다.

그리고 $x\to\infty$ 또는 $x\to-\infty$일 때, $f(x)$가 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하면 이것을 기호로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

와 같이 나타낸다.

예제 22. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$

풀이 분모가 엄청 커지면 분수는 0에 한없이 가까워진다. 따라서 두 극한 모두 극한값은 0이다. □

예제 23. 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}(1-x)(1+x)$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$　　(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}$

(5) $\lim_{x\to\infty}(2x+5)$　　(6) $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+2x-1)$

풀이 (1) ∞　(2) $-\infty$　(3) 1
(4) 0　(5) ∞　(6) $-\infty$ □

일반적으로 $x\to a+0$일 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 $x=a$에서의 $f(x)$의 **우극한**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=L \quad \text{또는} \quad x\to a+0\text{일 때 } f(x)\to L$$

과 같이 나타낸다.

또 $x\to a-0$일 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 M을 $x=a$에서의 $f(x)$의 **좌극한**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=M \quad \text{또는} \quad x\to a-0\text{일 때 } f(x)\to M$$

과 같이 나타낸다.

좌우극한과 극한의 관계
$x=a$에서 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 존재할 때
$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x)=L \iff \lim_{x\to a}f(x)=L.$$

참고 $x=a$에서 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 각각 존재하더라도 그것이 같지 않으면 $x=a$에서 $f(x)$의 극한은 존재하지 않는다.

예제 24. 함수 $f(x)$가 다음과 같이 정의되었을 때, $x=0$에서 좌극한, 우극한, 극한을 조사하여라.

(1) $f(x)=\frac{x^2+x}{x}$　　(2) $g(x)=\frac{1}{x}$　　(3) $h(x)=\frac{|x|}{x}$

풀이 (1) $\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to-0}(x+1)=1,$

$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to+0}(x+1)=1,$

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to0}(x+1)=1.$

(2) $\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty,$

$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty.$

점 $x=0$에서 좌극한과 우극한이 모두 존재하지 않으므로 (발산하므로) $x=0$에서 $f(x)$의 극한은 발산한다.

(3) $\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-0}(-1)=-1,$

$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+0}1=1.$

점 $x=0$에서 (좌극한)$\neq$(우극한)이므로 $x=0$에서 $f(x)$의 극한은 발산한다. □

참고 다음과 같은 경우에는 다음 x의 값에서 좌극한과 우극한이 다를 수 있으므로 주의한다.

(1) 분수함수 : 분모가 0이 되게 하는 x의 값
(2) 구간이 나누어져 정의된 함수 : 구간의 경계가 되는 x의 값
(3) 절댓값 기호를 포함한 함수 : 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x의 값
(4) 가우스 기호를 포함한 함수 : 가우스 기호 안의 식의 값을 정수가 되게 하는 x의 값

예제 25. 다음 극한을 조사하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{|x-1|}{x^2-x}$ (2) $\lim\limits_{x\to2}([x]+1)$

풀이 (1) $x-1>0$일 때에는 $\frac{|x-1|}{x^2-x}=\frac{x-1}{x(x-1)}=\frac{1}{x}$,

$x-1<0$일 때에는 $\frac{|x-1|}{x^2-x}=\frac{-(x-1)}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}$

이므로

$$(\text{좌극한})=\lim_{x\to1-0}\frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x\to1-0}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1,$$

$$(\text{우극한})=\lim_{x\to1+0}\frac{|x-1|}{x^2-x}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x}=1$$

이다. (좌극한)$\neq$(우극한)이므로 $x=1$에서 극한은 존재하지 않는다. (발산한다.)

(2) $1<x<2$일 때 $[x]=1$이므로

$$(\text{좌극한})=\lim_{x\to2-0}([x]+1)=1+1=2,$$

$2<x<3$일 때 $[x]=2$이므로

$$(\text{우극한})=\lim_{x\to2+0}([x]+1)=2+1=3.$$

즉 (좌극한)$\neq$(우극한)이므로 $x=2$에서 극한은 존재하지 않는다. (발산한다.) □

함수의 극한에 관한 성질

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$일 때

① $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=cA$ (단, c가 상수일 때.)

② $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=A+B$

③ $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=A-B$

④ $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=AB$

⑤ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$ (단, $g(x)\neq0$, $B\neq0$일 때.)

위 등식들은 a가 실수일 때, a가 양 또는 음의 무한대일 때에도 성립한다.

예제 26. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=2,\ \lim_{x\to\infty}\{f(x)+2g(x)\}=4$$

일 때, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{2f(x)+6g(x)}$의 값을 구하여라.

풀이 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}\{f(x)+2g(x)\}-\frac{1}{2}f(x)\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2}\{f(x)+2g(x)\}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2}f(x)$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)+2g(x)\}-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

$=\frac{1}{2}\cdot4-\frac{1}{2}\cdot2=1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{2f(x)+6g(x)}=\frac{2-2\cdot1}{2\cdot2+6\cdot1}=0.$$ □

예제 27. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$일 때

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2+4f(x)}{2x^2-f(x)}$$

의 값을 구하여라.

풀이 $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2+4f(x)}{2x^2-f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x+4\cdot\frac{f(x)}{x}}{2x-\frac{f(x)}{x}}$

$=\frac{3\cdot0+4\cdot2}{2\cdot0-2}=\frac{8}{-2}=-4.$ □

예제 28. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$ (2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

풀이 (1) (준식)$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3.$

(2) (준식)$=\lim\limits_{x\to3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}.$ □

예제 29. 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-2}{2x^2+1}$

풀이 (1) (준식)$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=3.$

(2) (준식)$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{3+0-0}{2+0}=\frac{3}{2}$ □

예제 30. 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+1}{x-3}$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+3x}}$

풀이 (1) 주어진 식의 분모와 분자를 x^2으로 나누면

$$(\text{준식})=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\infty.$$

(2) 주어진 식의 분모와 분자를 $-x$로 나누면

$$(\text{준식})=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=\frac{-2+0}{\sqrt{1-0}}=-2.$$ □

예제 31. 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+2)$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3x+1})$

풀이 (1) (준식)$=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)=\infty$.

(2) (준식)$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^2-3x+1})(x+\sqrt{x^2-3x+1})}{x+\sqrt{x^2-3x+1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x+\sqrt{x^2-3x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{3}{2}.$$ □

예제 32. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{4x+1}\right)$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x}}\right)$

풀이 (1) (준식)$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{4x+1-(x+1)}{(x+1)(4x+1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{3x}{4x^2+5x+1}=\lim_{x\to0}\frac{3}{4x^2+5x+1}=3.$$

(2) (준식)$=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt{2x+1})(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+1})}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+1})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2x+\sqrt{4x^2+2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{2+\sqrt{4+\dfrac{2}{x}}}=-\frac{1}{4}.$$ □

> **함수의 극한의 대소관계**
>
> $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$일 때
>
> ① a에 가까운 모든 x에 대하여 $f(x)\le g(x)$이면 $A\le B$.
>
> ② a에 가까운 모든 x에 대하여 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $A=B$이면 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$.

예제 33. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}$

풀이 (1) $x\neq0$인 모든 x에 대하여

$$-|x|\le\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$$

이고 $\lim\limits_{x\to0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to0}|x|=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=0$$

이다. 따라서 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$이다.

(2) 모든 양수 x에 대하여

$$-\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{\cos x}{x}\le\left|\frac{1}{x}\right|$$

이 성립한다.

그런데

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\left|\frac{1}{x}\right|\right)=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{x}\right|=0$$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$$

이다. □

4 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 세 조건

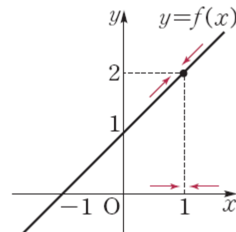
(i) $x=a$에서 $f(x)$가 정의되어 있다,

(ii) $x=a$에서 $f(x)$의 극한값이 존재한다,

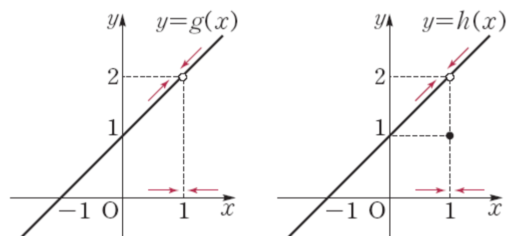
(iii) $x=a$에서 $f(x)$의 극한값과 함숫값이 일치한다

를 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라고 말한다. 반면에 만약 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라고 말한다.

예를 들어 다음과 같은 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.



그러나 다음 두 경우 $g(x)$와 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



> **연속함수의 성질**
>
> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수들도 $x=a$에서 연속이다. (단, c는 상수)
>
> ① $cf(x)$ ② $f(x)+g(x)$
>
> ③ $f(x)-g(x)$ ④ $f(x)g(x)$
>
> ⑤ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x)\neq0$일 때)

예제 34. $x=0$에서 다음 함수의 연속성을 조사하여라.

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ (2) $f(x)=|x|$

풀이 (1) $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=0$이고 극한값은

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to0}(x+1)=1$$

이므로 (함숫값)$\neq$(극한값)이다. 따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(2) $x=0$에서의 함숫값은 $f(0)=0$이고 극한값은

$$(\text{좌극한})=\lim_{x\to-0} f(x)=\lim_{x\to-0}|x|=\lim_{x\to-0}(-x)=0,$$
$$(\text{우극한})=\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}|x|=\lim_{x\to+0}x=0$$

이다. 따라서 $x=0$에서 (함숫값)=(극한값)$=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. □

실수 a, b에 대하여 **구간**을 다음과 같이 정의한다.

$$[a,\ b]=\{x\,|\,a\le x\le b\},\ (a,\ b)=\{x\,|\,a<x<b\}$$
$$[a,\ b)=\{x\,|\,a\le x<b\},\ (a,\ b]=\{x\,|\,a<x\le b\}$$
$$[a,\ \infty)=\{x\,|\,a\le x\},\ (a,\ \infty)=\{x\,|\,a<x\}$$
$$(\infty,\ b]=\{x\,|\,x\le b\},\ (\infty,\ b)=\{x\,|\,x<b\}$$

이때 점 a를 구간의 **왼쪽 끝점**, b를 구간의 **오른쪽 끝점**이라고 부르며, 이 두 끝점을 통틀어 구간의 **끝점**이라고 부른다.

위 구간들 중에서 $[a,\ b]$를 **닫힌구간**, $(a,\ b)$를 **열린구간**, $[a,\ b)$와 $(a,\ b]$를 **반닫힌구간** 또는 **반열린구간**이라고 부른다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수에 대하여 연속일 때 $f(x)$는 그 구간에서 **연속**이라고 말하고 이때 $f(x)$를 **연속함수**라고 부른다.

단, 구간의 왼쪽 끝점에서는 우극한을 이용하고 구간의 오른쪽 끝점에서는 좌극한을 이용하여 연속을 판정한다. 예를 들어 함수 $f(x)$가 두 조건

(i) 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이다,

(ii) $\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b)$

를 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 말한다.

예제 35. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x} & (x\ne 0)\\ k & (x=0)\end{cases}$$

로 정의되었을 때 $f(x)$가 $[0,\ 1]$에서 연속이 되도록 상수 k의 값을 정하여라.

풀이 $x=0$에서 $f(x)$의 우극한은

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to+0}(x+1)=1$$

이다. 따라서 $k=1$이라고 하면

($x=0$에서의 함숫값)=($x=0$에서의 우극한)

이 되어 $x=0$에서 $f(x)$가 연속이 된다. 따라서 $k=1$이다. □

> **연속함수의 최대 · 최소 정리**
> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

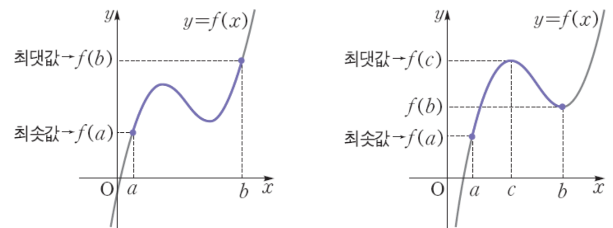
참고 닫힌구간이 아닌 경우 연속함수가 최댓값과 최솟값을 갖지 않을 수도 있다. 예를 들어 $(-1,\ 1)$에서 $f(x)=x$로 정의된 함수 $f(x)$는 최댓값이나 최솟값을 갖지 않는다. □

참고 연속이 아닌 함수는 최댓값과 최솟값을 갖지 않을 수 있다. 예를 들어

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{if } x\ne 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$

으로 정의된 함수 $f(x)$는 $[-1,\ 1]$에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않는다. □

참고 아래 그림에서 볼 수 있는 것처럼 $f(x)$가 $[a,\ b]$에서 연속일 때에는 최댓값과 최솟값을 구간의 끝점에서 가질 수도 있고 구간의 내부에 있는 점에서 가질 수도 있다.



예제 36. 이차함수 $f(x)=x^2-2x+3$이 $[0,\ 3]$에서 최댓값과 최솟값을 가짐을 보여라.

풀이 두 가지 방법으로 풀어보자.

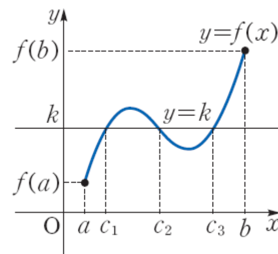
방법 1. $f(x)=(x-1)^2+2$이므로 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 2)$이다. 이때 1은 $[0,\ 3]$에 속하는 점이므로 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 2를 가진다. 한편 구간의 끝점에서 함숫값을 구해보면 $f(0)=3$, $f(3)=6$이므로 $x=3$일 때 최댓값 6을 가진다.

방법 2. $f(x)$는 $[0,\ 3]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 가진다. □

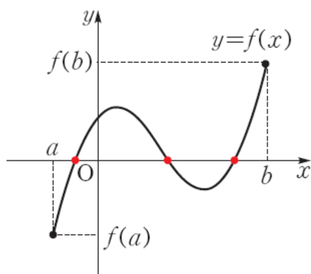
참고 위 예제에서 보는 바와 같이 연속함수의 최대·최소 정리를 이용하면 최댓값과 최솟값을 직접 구하지 않더라도 주어진 구간에서 함수가 최댓값과 최솟값을 가진다는 사실을 알 수 있다. □

> **연속함수의 중간값 정리**
> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\ne f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 하나 이상 존재한다.

참고 아래그림에서 보는 바와 같이 $f(c)=k$를 만족시키는 c가 $(a,\ b)$에 두 개 이상 존재할 수도 있다.



참고 중간값 정리는 방정식의 근이 존재하는지 알아볼 때에도 사용된다.



위 그림과 같이 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 다르면, 즉 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(a,\ b)$에서 하나 이상의 근을 가진다. □

예제 37. 다음 방정식이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

(1) $x^4-x^3-7x+1=0$ $\quad(-1,\ 1)$

(2) $x=\cos x$ $\quad\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$

풀이 (1) $f(x)=x^4-x^3-7x+1$이라고 하면

$$f(-1)f(1)=10\cdot(-6)<0$$

이므로 $f(x)=0$은 $(-1,\ 1)$에서 근을 가진다.

(2) $f(x)=x-\cos x$라고 하면

$$f(0)f\left(\frac{\pi}{4}\right)=(-1)\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$$

이므로 $x-\cos x=0$은 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$에서 근을 가진다. □

5 미분계수와 도함수

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, y의 값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다. 이때

x의 값의 변화량 $b-a$를 x의 **증분**,
y의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 **증분**

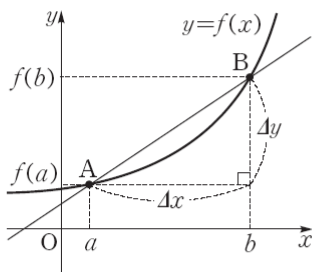
이라고 부르고, 기호로 각각 Δx, Δy와 같이 나타낸다. 즉

$$\Delta x=b-a,\quad \Delta y=f(b)-f(a)$$

이다. 또한

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율**이라고 부른다.



즉 평균변화율은 그래프 위의 두 점 $(a,\ f(a))$와 $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기이다.

예제 38. 함수 $f(x)=x^2$에서 x의 값이 1에서 2까지 변할 때 평균변화율을 구하여라.

풀이 $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{4-1}{1}=3.$ □

예제 39. $x=2$일 때와 $x=4$일 때 $f(x)=-2x+1$의 그래프 위의 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구하여라.

풀이 $\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{-7-(-3)}{4-2}=\dfrac{-4}{2}=-2.$ □

참고 상수함수와 일차함수의 평균변화율은 일정하다. 즉

$$f(x)=ax+b$$

라고 하면, 서로 다른 두 점 x_1, x_2에 대하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_2-x_1}=a$$

이므로 평균변화율은 그래프의 기울기와 같다. 이처럼 그래프가 직선인 경우 평균변화율은 일정하며 그 값은 그래프의 기울기와 동일하다. □

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

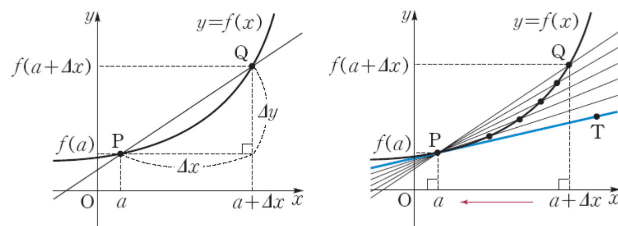
이다. 여기서 $\Delta x\to 0$일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 이 값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서 **순간변화율** 또는 **미분계수**라고 하며, 이것을 기호로

$$f'(a)$$

와 같이 나타낸다.



참고 미분계수의 정의에서 $a+\Delta x=x$로 놓으면 $\Delta x=x-a$이고 $\Delta x\to 0$일 때 $x\to a$이므로 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

로 나타낼 수도 있다.

미분계수의 기하학적 의미
함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

예제 40. $f(x)=x^2$일 때 $x=2$에서 $f(x)$의 미분계수를 구하여라.

풀이 두 가지 방법으로 구해보자.

방법 1. $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+4\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+4)=4.$$

방법 2. $f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$ □

예제 41. 함수 $f(x)=x^2-1$에 대하여 다음을 구하여라.
(1) $f'(0)$ (2) $f'(1)$ (3) $f'(x)$

풀이 (1) $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x=0.$

(2) $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)-(1^2-1)}{x-1}$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

(3) $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(x+\Delta x)^2-1\}-(x^2-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$ □

참고 상수함수의 미분계수는 항상 0이고, 일차함수의 미분계수는 항상 일차항의 계수와 같다. 즉 $f(x)=ax+b$라고 하면
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{a(x+\Delta x)+b\}-(ax+b)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x}{\Delta x}=a$$
이므로 $f'(x)=a$이다. □

참고 고등학교 과정에서 미분은 주로 그래프의 기울기와 관련하여 정의된다. 하지만 본래 미분의 의미는 넓게 보면 '아주 작게 자른 조각'이며, 좁게 보면 '서로 관계있는 양들 사이의 순간적인 변화의 비율'이다.

예제 42. 곡선 $y=x^2-2x$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $f(x)=x^2-2x$라고 하면
$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(2+\Delta x)^2+2(2+\Delta x)\}-(2^2-2\cdot 2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2)=2$$
이다. 따라서 접선의 기울기는 2이다. 이 직선은 $(2,\ 0)$을 지나야 하므로 구하는 접선의 방정식은 $y=2(x-2)+0$이다. 이것을 예쁘게 바꾸면 $y=2x-4$를 얻는다. □

예제 43. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=1$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$ (2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h}$

풀이 (1) (준식)$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\cdot(-1)$
$$=f'(a)\cdot(-1)=-1.$$

(2) (준식)$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h$
$$=f'(a)\cdot\lim_{h\to 0}h=f'(a)\cdot 0=0.$$ □

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수
$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 말한다.

또 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x에 대하여 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 **미분가능**하다고 말한다.

미분가능성과 연속성
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분 가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. [그러나 일반적으로 그 역은 성립하지 않는다.]

증명 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분 가능하다고 하자. 그러면
$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)+f(a)$$
$$=f'(a)\lim_{x\to a}(x-a)+f(a)$$
$$=f'(a)\cdot 0+f(a)=f(a)$$
이므로 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. ■

참고 위 명제의 대우를 이용하여 주어진 함수가 미분 불가능함을 보일 수 있다.

예제 44. 다음 함수가 $x=0$에서 미분 가능한지 판별하여라.

(1) $f(x)=x^2$　　(2) $g(x)=|x|$　　(3) $h(x)=[x]$

풀이 (1) 미분의 정의에 따르면

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=0$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분 가능하다.

(2) 미분의 정의에서 좌극한과 우극한을 구해보면

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}(-1)=-1,$$

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}1=1$$

이므로 (좌극한)$\neq$(우극한)이어서 극한

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}$$

은 존재하지 않는다. 따라서 $x=0$에서 $g(x)$는 미분 불가능하다.

(3) 좌극한과 우극한을 구해보면

$$\lim_{x\to -0}h(x)=\lim_{x\to -0}[x]=-1,\ \lim_{x\to +0}h(x)=\lim_{x\to +0}[x]=0$$

이므로 $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. 따라서 $h(x)$는 $x=0$에서 미분 불가능하다. □

참고 위 예제의 (2)에서 보는 바와 같이 연속이지만 미분 불가능한 경우가 존재한다. □

함수 $f(x)$가 정의역에서 미분 가능할 때 $f'(x)$는 새로운 함수가 된다. 이 함수를 $f(x)$의 **도함수**라고 부르고, 기호로

$$f'(x),\quad y',\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

함수 $y=f(x)$에서 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $f(x)$를 x에 대하여 **미분한다**고 하고, 그 계산법을 **미분법**이라고 부른다.

단항함수의 미분법

$y=x^n$을 미분하면 $y'=nx^{n-1}$. (n은 자연수)

증명 $f(x)=x^n$이라고 하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^n\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}+\cdots+x^n\}$$
$$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n\text{ times}}=nx^{n-1}.$$ □

참고 미분법 공식 $y'=nx^{n-1}$에서 $x=0$이고 $n=1$인 경우 편의상 $y'=nx^{n-1}=0^0=1$인 것으로 약속한다.

여러 가지 함수의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분 가능할 때 다음이 성립한다.

① $y=cf(x)$이면 $y'=cf'(x)$. (단, c가 상수일 때)

② $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$.

③ $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$.

④ $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

⑤ $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$이고 $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$이면

$$y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}.$$

증명 극한의 성질에 의해 다음을 얻는다.

② $$y'=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=f'(x)+g'(x).$$

④ $$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$
$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

⑤ $$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right.$$
$$\left.-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$
$$=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}.$$

①은 ④에서 $g(x)=c$로 두면 된다.

③은 $f(x)+(-1)g(x)$를 미분하면 된다. ■

예제 45. 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=x^2+2x$　　(2) $y=\dfrac{1}{2}x-3$

풀이 (1) $y'=2x+2$　　(2) $y'=\dfrac{1}{2}$ □

예제 46. 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=(x+1)(x^2+1)$　(2) $g(x)=(x^3+1)(x^2-1)$

풀이 (1) $f'(x)=(x+1)'(x^2+1)+(x+1)(x^2+1)'$
$=1\cdot(x^2+1)+(x+1)\cdot 2x$
$=x^2+1+2x^2+2x=3x^2+2x+1.$

(2) $g'(x)=(x^3+1)'(x^2-1)+(x^3+1)(x^2-1)'$
$=3x^2\cdot(x^2-1)+(x^3+1)\cdot 2x$
$=3x^4-3x^2+2x^3+2x=3x^4+2x^3-3x^2+2x.$ □

예제 47. 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ (2) $g(x)=\dfrac{(x^2+1)(x-1)}{x^2-1}$

풀이 (1) $f'(x)=\dfrac{(x+1)'(x-2)-(x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2}=-\dfrac{3}{(x-2)^2}.$

(2) $g'(x)=\dfrac{\{(x^2+1)(x-1)\}'(x^2-1)-(x^2+1)(x-1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}.$

위 식의 분자를 계산하면

$$\begin{aligned}(\text{분자})&=(x^2+1)'(x-1)(x^2-1)+(x^2+1)(x-1)'(x^2-1)\\&\quad-(x^2+1)(x-1)(x^2-1)'\\&=2x\cdot(x-1)(x^2-1)+(x^2+1)(x^2-1)\\&\quad-(x^2+1)(x-1)\cdot 2x\\&=(x-1)^2(x^2+2x-1)\end{aligned}$$

이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$g'(x)=\frac{(x-1)^2(x^2+2x-1)}{\{(x+1)(x-1)\}^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}.$$

다른 풀이 $g(x)=\dfrac{(x^2+1)(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{x^2+1}{x+1}$이므로

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{(x^2+1)'(x+1)-(x^2+1)(x+1)'}{(x+1)^2}\\&=\frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$ □

6 여러 가지 미분법

이제 다양한 방법으로 표현된 함수의 미분법을 살펴보자.

> **연쇄법칙** (합성함수의 미분법)
> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분 가능하고 합성함수 $g\circ f$가 존재할 때 다음이 성립한다.
> ① $y=g(f(x))$이면 $y'=g'(f(x))f'(x)$.
> ② $y=\{f(x)\}^n$이면 $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$.

증명 ① $y=g(u)$, $u=f(x)$가 미분 가능하다고 하자. $f(x)$의 변화율이 0이 아니면

$$\begin{aligned}y'&=\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=g'(f(x))f'(x)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

한편 $f(x)$의 변화율이 0이면 자명하게

$$y'=\frac{dy}{dx}=0=\frac{dy}{dy}\cdot\frac{du}{dx}$$

가 성립한다.

② $g(x)=x^n$으로 두고 ①을 적용하면 된다. ■

참고 연쇄법칙은 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$로 쓸 수도 있다.

예제 48. 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=(2x^2-1)^3$ (2) $g(x)=(x^3+2x)^3(x^3-2x)^2$

풀이 (1) $f'(x)=3(2x^2-1)^2(2x^2-1)'$

$=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=12x(2x^2-1)^2.$

(2) $g(x)=(x^3+2x)^3(x^3-2x)^2$

$=(x^3+2x)\{(x^3+2x)(x^3-2x)\}^2$

$=(x^3+2x)(x^6-4x^2)^2$

이므로

$$\begin{aligned}g'(x)&=(3x^2+2)(x^6-4x^2)^2\\&\quad+(x^3+2x)\cdot 2(x^6-4x^2)\cdot(6x^5-8x).\end{aligned}$$ □

예제 49. x에 대한 다항식 $f(x)=x^{10}-ax+b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

풀이 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $g(x)$라고 하면 $f(x)=(x-1)^2g(x)$이므로

$$x^{10}-ax+b=(x-1)^2g(x) \qquad \cdots ㉠$$

이다. 양변을 x에 대하여 미분하면

$$10x^9-a=2(x-1)g(x)+(x-1)^2g'(x) \qquad \cdots ㉡$$

이다. $x=1$을 ㉠, ㉡에 대입하면

$$1-a+b=0,\ 10-a=0$$

이고 이것을 연립하여 풀면 $a=10$, $b=9$이다. □

참고 다항식 $f(x)$가 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어질 조건은

$$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0$$

을 만족시키는 것이다. □

예제 50. 다음 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}bx+3 & (x\ge 1)\\ x^2+a & (x<1)\end{cases}$$

이고 $x=1$에서 미분 가능할 때 상수 a, b의 값을 구하여라.

풀이 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1}(x^2+a)=f(1)$$

이다. 즉 $1+a=b+3$이다. 한편 $x=1$에서 $f(x)$이 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=b,\quad \lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$$

에서 $b=2$이다. 이것을 $1+a=b+3$에 대입하면 $a=4$이다. 따라서 $a=4$, $b=2$이다. □

일반적으로 두 변수 x, y 사이의 관계가 변수 t를 매개로 하여

$$x=f(t),\ y=g(t)$$

의 꼴로 표현될 때 변수 t를 **매개변수**라고 부르고, 위 식을 **매개변수로 나타내어진 함수**라고 부른다. 예를 들어

$$x=3\cos t,\ y=3\sin t \quad (0\le t<2\pi)$$

라고 하면 위 식은 좌표평면에서 중심이 O이고 반지름이 3인 원을 나타내는 함수이다.

한편 x의 함수 y가 $f(x,\ y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 **음함수**라고 부른다. 예를 들어

$$x^2+y^2=9$$

는 $f(x,\ y)=x^2+y^2-9$에 대하여 $f(x,\ y)=0$으로 나타낼 수 있으므로, 위 식에서 y는 x의 음함수이다.

여러 가지 미분 공식(2)

함수 f, g가 미분 가능할 때

(1) **매개변수 미분법** : $x=f(t)$이고 $y=g(t)$이며 $f'(t)\neq 0$이면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

(2) **음함수 미분법** : x의 함수 y가 음함수 $f(x,\ y)=0$의 꼴 로 주어졌을 때, y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

(3) **역함수의 미분법** : $y=f(x)$의 역함수가 존재하고 미분 가능하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

예제 51. 매개변수로 나타내어진 함수 $x=3t-5,\ y=t^2-3t$에서 $\frac{dy}{dx}$를 t의 식으로 나타내어라.

풀이 $\frac{dx}{dt}=3,\ \frac{dy}{dt}=2t-3$이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-3}{3}$ □

예제 52. 음함수 $x^2+y^2-9=0$에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

풀이 음함수 $x^2+y^2-9=0$에서 y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2-9)=\frac{d}{dx}(0)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)-\frac{d}{dx}(9)=0$$

$$\Rightarrow\quad 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}(y\neq 0)$$ □

예제 53. 역함수의 미분법을 이용하여 함수 $y=\sqrt[5]{x-3}$의 도함수를 구하여라.

풀이 $y=\sqrt[5]{x-3}$에서 $y^5=x-3$, 즉 $x=y^5+3$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{5y^4}=\frac{1}{5(\sqrt[5]{x-3})^4}=\frac{1}{5\sqrt[5]{(x-3)^4}}$$ □

예제 54. 음함수 $xy=25$에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하여라.

풀이 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}(25)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}(x)\cdot y+x\cdot\frac{d}{dx}(y)=0$$

$$\Rightarrow\quad y+x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$ □

7 삼각함수의 미분

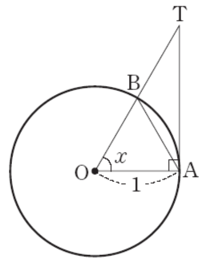
삼각함수의 극한과 미분법을 살펴보자.

삼각함수의 극한

① sin, cos, tan, sec, cosec, cot는 정의역의 모든 점에서 연속인 함수이다.

② $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (단, x의 단위는 라디안)

증명 오른쪽 그림에서



$$\triangle\mathrm{OAB}<(\text{부채꼴 OAB})<\triangle\mathrm{OAT}$$

이므로 $x>0$일 때

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

이고, 이 식을 변형하면

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

이다. 여기에 $x\to 0+$인 극한을 취하면

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

또한 사인 함수는 기함수이므로

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin(-x)}{-x}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

좌극한과 우극한이 모두 1에 수렴하므로 주어진 극한은 1에 수렴한다. ■

예제 55. 극한값 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$를 구하여라.

풀이 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=2$ □

예제 56. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

풀이 (1) $3x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right)=3\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=3\cdot1=3.$$

$$(2)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{3x\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}}{2x\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{2}$$ □

예제 57. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$

풀이 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right\}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(2) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{t}=-1$$ □

삼각함수의 도함수

① $y=\sin x$이면　$y'=\cos x$
② $y=\cos x$이면　$y'=-\sin x$
③ $y=\tan x$이면　$y'=\sec^2 x$
④ $y=\sec x$이면　$y'=\sec x\tan x$
⑤ $y=\operatorname{cosec} x$이면　$y'=-\operatorname{cosec} x\cot x$
⑥ $y=\cot x$이면　$y'=-\operatorname{cosec}^2 x$

증명 항등식

$$\cos h=\cos 2\left(\frac{h}{2}\right)=1-2\sin^2\frac{h}{2}$$

을 이용하면

$$(\sin x)'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{\cos x\sin h}{h}$$
$$=\sin x\lim_{h\to0}\frac{1-2\sin^2\dfrac{h}{2}-1}{h}+\cos x\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}$$
$$=\left(\lim_{h\to0}\sin\frac{h}{2}\right)\left(\lim_{h\to0}\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\right)+\cos x$$
$$=0\times1+\cos x=\cos x.$$

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$(\operatorname{cosec} x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin x}\,\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$=-\operatorname{cosec} x\cot x.$$

$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x\tan x.$$

$$(\cot x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x.$$ ■

예제 58. 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=3\sin x-\cos x$　　(2) $y=\tan(2x-5)$

풀이 (1) $y'=(3\sin x)'-(\cos x)=3\cos x-(-\sin x)$
$=3\cos x+\sin x$

(2) $y'=\sec^2(2x-5)\cdot(2x-5)'=\sec^2(2x-5)\cdot2$
$=2\sec^2(2x-5)$ □

예제 59. 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\sec x-2\operatorname{cosec} x$　　(2) $y=\cot(x^2-3)$

풀이 (1) $y'=(\sec x)'-(2\operatorname{cosec} x)'$
$=\sec x\tan x-(-2\operatorname{cosec} x\cot x)$
$=\sec x\tan x+2\operatorname{cosec} x\cot x$

(2) $y'=-\operatorname{cosec}^2(x^2-3)\cdot(x^2-3)'=-\operatorname{cosec}^2(x^2-3)\cdot2x$
$=-2x\operatorname{cosec}^2(x^2-3)$ □

예제 60. 사인 함수의 역함수 $y=\sin^{-1}x$에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라. $\left(단,\ -1<x<1,\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

풀이 $\sin y=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $y'\cos y=1$이므로 $y'\sqrt{1-\sin^2 y}=1$이다. 즉 다음을 얻는다.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ □

참고 삼각함수의 역함수의 정의역과 치역은 다음과 같다.

$y=\sin^{-1}x$　$\left(-1\le x\le1,\ -\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y=\cos^{-1}x$　$(-1\le x\le1,\ 0\le y\le\pi)$

$y=\tan^{-1}x$　$\left(x는\ 임의의\ 실수,\ -\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

또한 이들의 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$$ □

8 지수함수와 로그함수의 미분

극한의 성질을 이용하여 지수함수와 로그함수의 도함수를 구해 보자.

지수함수의 극한

① $a>0$, $a\neq 1$일 때 지수함수 $f(x)=a^x$는 실수 전체 집합에서 연속인 함수이다.

② 오일러 상수 : $e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (약 2.71828182845…)

참고 오일러 상수는 다음과 같이 정의할 수도 있다.

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

예제 61. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x}{5^x-1}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{2^x-3^x}$

풀이 (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x}{5^x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{5^x}}=\frac{1}{1-0}=1$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{2^x-3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1$ □

예제 62. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

풀이 (1) $2x=t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2=e^2$$

(2) $\frac{3}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^3=e^3$$ □

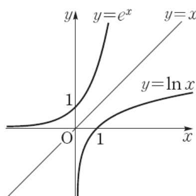
로그함수의 극한

① $a>0$, $a\neq 1$일 때 로그함수 $f(x)=\log_a x$는 모든 양의 실수 x에서 연속인 함수이다.

② 자연로그 : 밑이 e인 로그 $\ln x=\log_e x$

참고 밑이 e인 지수함수 $y=e^x$과 로그함수 $y=\ln x$는 서로 역함수 관계에 있다. 즉 다음이 성립한다.

$$y=e^x \iff x=\ln y$$



보기 63. $a>1$일 때 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to +0}\log_a x=-\infty,\ \lim_{x\to 1}\log_a x=0,$$
$$\lim_{x\to a}\log_a x=1,\ \lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty$$

또한 $0<a<1$일 때 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to +0}\log_a x=\infty,\ \lim_{x\to 1}\log_a x=0,$$
$$\lim_{x\to a}\log_a x=1,\ \lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$$ □

예제 64. 극한값 $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(3x+1)-\log_2 3x\}$를 구하여라.

풀이 $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(3x+1)-\log_2 3x\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{3x+1}{3x}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\left(1+\frac{1}{3x}\right)=\log_2\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)=\log_2 1=0$ □

예제 65. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

풀이 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$

$=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=\ln e=1$

(2) $e^x-1=t$로 놓으면 $e^x=1+t$이므로 $x=\ln(1+t)$이다. 또한 $x\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$
$$=\frac{1}{\ln\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}}=\frac{1}{\ln e}=1$$ □

지수함수와 로그함수의 도함수 (단, $a>0$, $a\neq 1$)

① $y=e^x$이면 $y'=e^x$

② $y=a^x$이면 $y'=a^x\ln a$

③ $y=\ln x$이면 $y'=\frac{1}{x}$ (단, $x>0$)

④ $y=\log_a x$이면 $y'=\frac{1}{x\ln a}$ (단, $x>0$)

⑤ $y=\ln|x|$이면 $y'=\frac{1}{x}$ (단, $x\neq 0$)

⑥ $y=\log_a|x|$이면 $y'=\frac{1}{x\ln a}$ (단, $x\neq 0$)

증명 ① $y'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x$.

② $y'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$

$=a^x\ln a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln a}-1}{h\ln a}=a^x\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}$

$=a^x\ln a\cdot 1=a^x\ln a$

③ $y'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}$.

④ $y'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$.

⑤, ⑥ $x>0$인 경우와 $x<0$인 경우로 나누어 계산한다. ■

예제 66. 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=e^{3x}$ (2) $y=3^{5x}$

풀이 (1) $u=3x$로 놓으면 $y=e^u$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot 3=3e^{3x}$$

(2) $u=5x$로 놓으면 $y=3^u$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3^u\ln 3\cdot 5=5\cdot 3^{5x}\ln 3$$ □

예제 67. 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\ln(3x-5)$ (2) $y=\log_2(x^2+3x)$

풀이 (1) $u=3x-5$로 놓으면 $y=\ln u$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot 3=\frac{3}{3x-5}.$$

(2) $u=x^2+3x$로 놓으면 $y=\log_2 u$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u\ln 2}\cdot(2x+3)=\frac{2x+3}{(x^2+3x)\ln 2}$$ □

예제 68. 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\ln|5x-3|$ (2) $y=\log_2|x^3-x|$

풀이 (1) $y'=\dfrac{(5x-3)'}{5x-3}=\dfrac{5}{5x-3}$

(2) $y'=\dfrac{(x^3-x)'}{(x^3-x)\ln 2}=\dfrac{3x^2-1}{(x^3-x)\ln 2}$ □

복잡한 분수함수의 도함수는 자연로그를 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

예제 69. 함수 $y=\dfrac{(x+1)(x-1)^3}{(x-2)^2}$을 미분하여라.

풀이 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\ln|x+1|+3\ln|x-1|-2\ln|x-2|$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-2}=\frac{2x^2-6x-2}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$y'=y\cdot\frac{2x^2-6x-2}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{2(x-1)^2(x^2-3x-1)}{(x-2)^3}$$ □

참고 α가 실수일 때 $y=x^\alpha$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\ln|x^\alpha|=\alpha\ln|x|$$

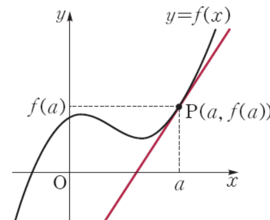
이므로 양변을 x에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x}\quad\Rightarrow\quad y'=y\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

즉 함수 $y=x^n$의 미분법 $y'=nx^{n-1}$은 n이 실수일 때에도 성립한다. □

9 미분의 활용

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.



따라서 다음 공식을 얻는다.

> **접선의 방정식**
> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은
> $$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

예제 70. 곡선 $y=x^3+2x^2-1$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서 이 곡선에 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 $f(x)=x^3+2x^2-1$이라고 하면 $f'(x)=3x^2+4x$이므로 $(1,\ 2)$에서 이 곡선에 접하는 직선의 기울기는 $f'(1)=7$이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=7(x-1)+2$이다. □

예제 71. 곡선 $y=x^3+ax^2+2x+b$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 3일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+2x+b$라고 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+2$$

이다. $f'(1)=3$이 되어야 하므로 $f'(1)=3+2a+2=3$이다. 이것을 풀면 $a=-1$이므로

$$f(x)=x^3-x^2+2x+b$$

이다. 한편 이 함수의 그래프가 $(1,\ 4)$를 지나므로 $f(1)=4$이다. 즉 $f(1)=1-1+2+b=4$이므로 $b=2$이다. □

예제 72. 곡선 $y=x^3-4x+3$에 접하고 기울기가 8인 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 $f(x)=x^3-4x+3$이라고 하면 $f'(x)=3x^2-4$이다. 기울기가 8이 되는 점을 구하려면 $f'(x)=3x^2-4=8$의 해를 구해야 한다. 이것을 풀면 $x=\pm 2$이다.

$x=2$일 때 $y=f(2)=3$이므로 접점은 $(2,\ 3)$,
$x=-2$일 때 $y=f(-2)=3$이므로 접점은 $(-2,\ 3)$

이다. 따라서 접선의 방정식은

$$y=8(x-2)+3 \quad \text{그리고} \quad y=8(x+2)+3$$

이다. □

예제 73. 원점을 지나고 곡선 $y=x^4-x^2+2$에 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 $f(x)=x^4-x^2+2$라고 하자. 그리고 어디서 접하게 될지 모르니까 접점을 $(a,\ f(a))$라고 하자. 즉

$$(a,\ f(a))=(a,\ a^4-a^2+2)$$

이다. 이때

$$f'(x)=4x^3-2x$$

이므로 접선의 방정식은

$$y=(4a^3-2a)(x-a)+(a^4-a^2+2)$$

이다. 이 직선이 원점을 지나야 하므로 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$$0=(4a^3-2a)(-a)+(a^4-a^2+2)$$

이고 이것을 풀면 $a=\pm 1$이다.

$a=1$일 때 접점은 $(1,\ 2)$,
$a=-1$일 때 접점은 $(-1,\ 2)$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y=(x-1)+2 \quad \text{그리고} \quad y=-(x+1)+2$$

이다. □

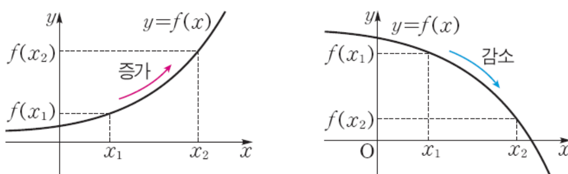
함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 $x_1,\ x_2$에 대하여

$$x_1<x_2 \text{일 때, } f(x_1)<f(x_2)$$

이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 **증가한다**고 말한다. 또

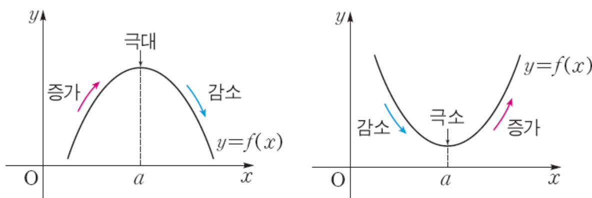
$$x_1<x_2 \text{일 때, } f(x_1)>f(x_2)$$

이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 **감소한다**고 말한다.



함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 x의 값이 증가하면서 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 변하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라고 하며, 함숫값 $f(a)$를 **극댓값**이라고 부른다.

또 x의 값이 증가하면서 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 변하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라고 하며, 함숫값 $f(a)$를 **극솟값**이라고 부른다.



극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 부른다.

극점에서의 미분계수
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

증명 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 극댓값을 갖는다고 하자. 그러면

Δx가 절댓값이 작은 양수일 때 $f(a+\Delta x)\le f(a)$,
Δx가 절댓값이 작은 음수일 때 $f(a+\Delta x)\le f(a)$

이므로

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\ge 0,$$

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\le 0$$

이다. 따라서 $f'(a)=0$이다. 극솟값을 갖는 경우에도 같은 방법으로 하면 된다. ■

평균값 정리
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분 가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족시키는 c가 a와 b 사이에 하나 이상 존재한다.

증명 구간 $[a,\ b]$에서 함수 $F(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$$

그러면 $F(a)=0,\ F(b)=0$이다. 또한 $F(x)$는 $[a,\ b]$에서 연속이므로 $[a,\ b]$에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

경우 1. 만약 $[a,\ b]$에서 $F(x)$의 최댓값과 최솟값이 같다면 $F(x)$는 $[a,\ b]$에서 상수함수이므로 $(a,\ b)$에 속하는 모든 c에 대하여 $F'(c)=0$이다.

경우 2. 만약 $[a,\ b]$에서 $F(x)$의 최댓값이 최솟값보다 크다면 $F(x)$는 $(a,\ b)$의 점 c에서 극값을 가진다. 이때 $F'(c)=0$이다.

두 경우 모두 $F'(c)=0$이 되는 c가 $(a,\ b)$에 존재한다. 이때

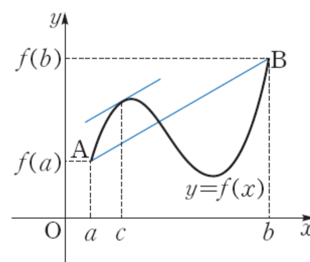
$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

이므로 여기에 $x=c$를 대입하면

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

이다. ■

참고 평균값 정리의 의미는 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 그래프를 그렸을 때, 그래프의 양 끝점을 이어서 만든 선분의 기울기와 같은 미분계수를 갖는 점이 $(a,\ b)$에 존재한다는 뜻이다.



함수의 증가상태와 감소상태

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때

① $f'(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다.

② $f'(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다.

증명 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이므로 $|\Delta x|$가 충분히 작으면

$$f'(a)\fallingdotseq\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다. 따라서 $f'(a)$와 $\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$는 같은 부호를 가진다.

경우 1. $f'(a)>0$이면

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}>0$$

이므로

$$\Delta x>0\text{일 때 } f(a+\Delta x)>f(a),$$
$$\Delta x<0\text{일 때 } f(a+\Delta x)<f(a)$$

이다. 따라서 $h=|\Delta x|$라고 하면

$$f(a-h)<f(a)<f(a+h)$$

이므로 f는 $x=a$에서 증가상태에 있다.

경우 2. $f'(a)<0$인 경우도 경우 1과 비슷한 방법을 이용하면 작은 양수 h에 대하여 $f(a-h)>f(a)>f(a+h)$임을 알 수 있다. ■

함수의 증가와 감소

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

③ $f'(x)=0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 상수함수이다.

증명 x_1과 x_2가 $[a,\ b]$의 점이고 $x_1<x_2$라고 하자. 평균값 정리에 의하여

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

인 점 c가 x_1과 x_2 사이에 존재한다. 이때 $x_2-x_1>0$이므로 $f(x_2)-f(x_1)$의 부호는 $f'(c)$와 동일하다. 따라서

(i) $f'(c)>0$이면 $f(x_1)<f(x_2)$가 되어 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가하고,

(ii) $f'(c)<0$이면 $f(x_1)>f(x_2)$가 되어 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

(iii) 만약 $f'(c)=0$이면 임의의 두 점 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 $f(x)$는 구간의 모든 점에서 동일한 함숫값을 가진다. 따라서 상수함수이다. ■

참고 위 법칙에서 구간이 닫힌구간이 아니라 열린구간이거나 반닫힌구간이어도 된다.

예제 74. 다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라.

(1) $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+1$

(2) $f(x)=-x^3+6x^2-9x-4$

풀이 (1) 주어진 함수를 미분하면

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$$

이다. $f'(x)=0$이 되는 점을 구하면 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 이 두 점을 기준으로 구간을 나누어 $f(x)$의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{9}{2}$	↘	-9	↗

(2) 주어진 함수를 미분하면

$$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$$

이다. $f'(x)=0$이 되는 점을 구하면 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 이 두 점을 기준으로 구간을 나누어 $f(x)$의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-8	↗	-4	↘

□

예제 75. 함수 $f(x)=x^3-2ax^2+ax$가 실수 전체 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

풀이 $f'(x)=3x^2-4ax+a$이다. 모든 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 $f'(x)$의 판별식이 $D\le 0$이 되어야 한다. 즉

$$D=16a^2-12a\le 0$$

이므로 $0\le a\le\dfrac{3}{4}$이다. □

함수의 극대와 극소의 판정

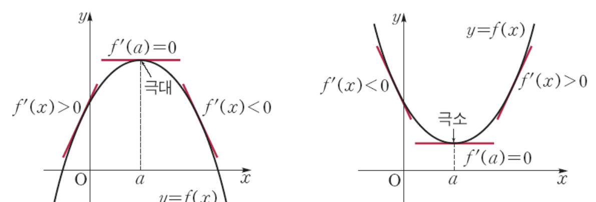
미분가능한 함수 $y=f(x)$에서 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

증명 ① $x=a$의 왼쪽에서 $f'(x)>0$이므로 $x=a$의 왼쪽에서 $f(x)$는 증가상태이고, $x=a$의 오른쪽에서 $f'(x)<0$이므로 $x=a$의 오른쪽에서 $f(x)$는 감소상태이다. 따라서 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가진다. ②도 같은 방법으로 증명한다. ■

위 내용을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



예제 76. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+3$의 극값을 구하여라.

풀이 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$이다. $f'(x)=0$인 점을 구하면 $x=-1$ 또는 $x=3$이다. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8	↘	-24	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 8을 갖고, $x=3$일 때 극솟값 -24를 가진다. □

예제 77. 함수 $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3+1$의 극값을 구하여라.

풀이 $f'(x)=4x^3-4x^2=4x^2(x-1)$이다. $f'(x)=0$이 되는 x를 구하면 $x=0$ 또는 $x=1$이다. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	$\frac{2}{3}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=\frac{2}{3}$를 가진다. □

예제 78. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값 3을 갖고 $x=1$에서 극솟값을 갖는다. 이때 실수 a, b, c의 값을 구하여라.

풀이 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 함수 $f(x)$가 $x=-1$과 $x=1$에서 극값을 가지므로

$$f'(-1)=3-2a+b=0,\quad f'(1)=3+2a+b=0.$$

연립하여 풀면 $a=0$, $b=-3$이므로 $f(x)=x^3-3x+c$이다.
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 3을 가지므로

$$f(-1)=-1+3+c=3,\quad c=1$$

이다. 따라서 $a=0$, $b=-3$, $c=1$이다. □

> **함수의 그래프**
> 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.
> (i) $f'(x)=0$인 x의 값을 구한다.
> (ii) 위 (i)에서 구한 x의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 증감표를 만든다.
> (iii) 증감표를 이용하여그래프의 개형을 그린다.

예제 79. 함수 $y=x^3-3x^2+4$의 그래프를 그려라.

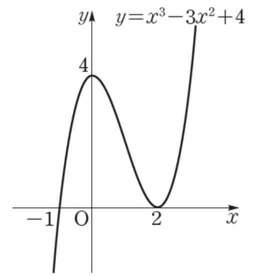
풀이 $f(x)=x^3-3x^2+4$라고 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

이므로 $f'(x)=0$인 점을 구하면 $x=0$, $x=2$이다. 이 두 점을 기준으로 구간을 나누어 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4, $x=2$에서 극솟값 0을 갖는다. 따라서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



참고 삼차·사차함수의 극값이 존재할 조건은 다음과 같다.

(1) 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가진다.
⇔ 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가진다.
⇔ 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식이 $D>0$이다.

(2) 최고차항이 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가진다.
⇔ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가진다.

예제 80. 함수 $y=\frac{1}{2}x^4-2x^3+8$의 그래프를 그려라.

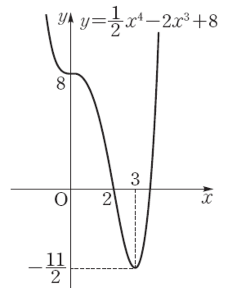
풀이 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+8$이라고 하면

$$f'(x)=2x^3-6x^2=2x^2(x-3)$$

이므로 $f'(x)=0$인 점을 구하면 $x=0$, $x=3$이다. 따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

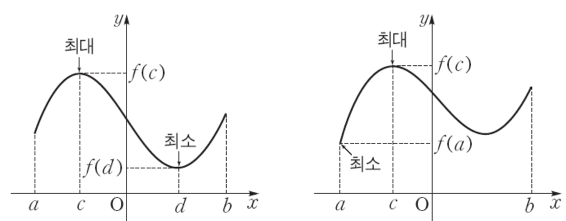
x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	8	↘	$-\frac{11}{2}$	↗

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 $-\frac{11}{2}$을 갖고, 극댓값은 없다. 따라서 함수 $y=\frac{1}{2}x^4-2x^3+8$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



> **함수의 최대 · 최소**
> 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속함수 $f(x)$의 최댓값, 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.
> (i) 주어진 구간에서 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 모두 구한다.
> (ii) 주어진 구간의 양 끝에서의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 구한다.
> (iii) 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

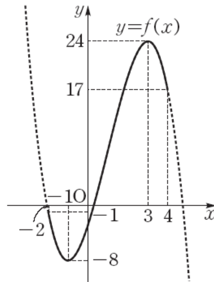
참고 아래 그림처럼 최댓값과 최솟값은 구간의 안쪽에 있는 점에서 존재할 수도 있고 구간의 끝점에서 존재할 수도 있다.



예제 81. 구간 $[-2,\ 4]$에서 함수 $f(x)=-x^3+3x^2+9x-3$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이 $f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$이므로 $f'(x)=0$인 점을 구하면 $x=-1,\ x=3$이다. 구간 $[-2,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-1	↘	-8	↗	24



따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 24, 최솟값은 -8이다.

이계도함수

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 한 번 더 미분한 함수를 $f(x)$의 **이계도함수**라고 부르며 기호로

$$f''(x),\ y'',\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

참고 함수 $f(x)$를 n번 미분한 함수를 $f(x)$의 **n계도함수**라고 부르며 기호로

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{(dx)^n},\ \frac{d^n}{(dx)^n}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

예제 82. 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

(1) $y=\ln x$　　(2) $y=\sin 3x$

풀이 (1) $y'=\dfrac{1}{x}$이므로 $y''=-\dfrac{1}{x^2}$.

(2) $y'=\cos 3x\cdot 3=3\cos 3x$이므로

$$y''=3(-\sin 3x)\cdot 3=-9\sin 3x$$ □

예제 83. 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$　　(2) $y=xe^x$

풀이 (1) $y'=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$이므로

$$y''=-\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

(2) $y'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$이므로

$$y''=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$$ □

함수의 극값 판정

이계도함수를 갖는 함수 $y=f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때

① $f''(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

② $f''(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

예제 84. 이계도함수를 이용하여 함수 $f(x)=x-2\sin x$의 극값을 구하여라. (단, $0\le x\le 2\pi$)

풀이 $f'(x)=1-2\cos x$이므로 $f'(x)=0$을 풀면

$$x=\frac{\pi}{3}\ \text{또는}\ x=\frac{5}{3}\pi$$

이다. $f''(x)=2\sin x$이므로

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}>0,\quad f''\left(\frac{5}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}<0$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$에서 극대이고 극댓값은

$$f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$$

이며, $x=\dfrac{\pi}{3}$에서 극소이고 극솟값은

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$$

이다. □

곡선의 오목과 볼록

함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서

① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록이다.

② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 변하거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변할 때, 이 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 **변곡점**이라고 부른다.

변곡점의 판정

함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

예제 85. 곡선 $y=x^3-3x^2+4$의 오목과 볼록을 조사하고, 변곡점의 좌표를 구하여라.

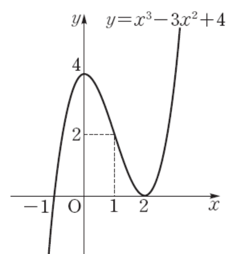
풀이 $f(x)=x^3-3x^2+4$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x$

$f''(x)=6x-6=6(x-1)$

이다. $f''(x)=0$인 점을 구하면 $x=1$이다. 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤵	2	⤷



따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x<1$일 때 위로 볼록하고, $x>1$일 때 아래로 볼록하다.

또 변곡점의 좌표는 $(1,\ 2)$이다. □

방정식과 부등식

(1) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다. 따라서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수를 조사하면 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수를 구할 수 있다.

(2) 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 보이려면 함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 조사하여 그 구간에서 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다.

(3) 또 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립함을 보이려면 $F(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 $F(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다.

예제 86. 방정식 $x^3+3x^2-1=0$의 실근의 개수를 구하여라.

풀이 $f(x)=x^3+3x^2-1$이라고 하면 $f'(x)=3x(x+2)$이다. 따라서 $f'(x)=0$인 점은 $x=-2$, $x=0$이다. 이 점을 기준으로 구간을 나누어 함수의 증감표를 작성하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점은 $x=-2$의 왼쪽에 하나, $x=-2$와 $x=0$ 사이에 하나, $x=0$의 오른쪽에 하나로서 3개다. 따라서 주어진 방정식의 실근은 3개다. □

예제 87. 다음 삼차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $2x^3-6x^2+3=0$

(2) $x^3-3x-2=0$

(3) $x^3-6x^2+9x+2=0$

풀이 (1) $f(x)=2x^3-6x^2+3$으로 두면 $f'(x)=6x(x-2)$이다. $f'(x)=0$인 점을 구하면 $x=0$, $x=2$이다. 따라서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 (극댓값)$=f(0)=3$, (극솟값)$=f(2)=-5$이므로

(극댓값)$\times$(극솟값)<0

이다. 따라서 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 가진다.

(2) $f(x)=x^3-3x-2$로 두면

$$f'(x)=3(x+1)(x-1)$$

이다. $f'(x)=0$인 점을 구하면 $x=-1$, $x=1$이다. 따라서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 (극댓값)$=f(-1)=0$, (극솟값)$=f(1)=-4$이므로

(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$

이다. 따라서 $f(x)=0$은 하나의 실근과 한 쌍의 중근을 가진다.

(3) $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$로 두면

$$f'(x)=3(x-1)(x-3)$$

이다. $f'(x)=0$인 점을 구하면 $x=1$, $x=3$이다. 따라서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

즉 (극댓값)$=f(1)=6$, (극솟값)$=f(3)=2$이므로

(극댓값)(극솟값)>0

이다. 따라서 $f(x)=0$은 하나의 실근과 두 허근을 가진다. □

예제 88. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4-4x+5>0$이 성립함을 미분을 이용하여 증명하여라.

풀이 $f(x)=x^4-4x+5$라고 하면 $f'(x)=4x^3-4$이다. 이때 $f'(x)=0$인 점은 $x=1$일 때뿐이며 증감표는 아래와 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2	↗

즉 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 2를 가진다. 최솟값이 양수이므로 이 함수는 항상 양수의 값만 가진다. □

예제 89. $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $2x^3-6x+5>0$이 성립함을 미분을 이용하여 증명하여라.

풀이 $f(x)=2x^3-6x+5$로 두면 $f'(x)=6x^2-6$이다.
이때 $x>1$이면

$$f'(x)=6x^2-6>6\cdot 1^2-6=0$$

이므로 $x>1$일 때 $f(x)$는 항상 증가한다. 또한 $f(1)=1>0$이므로 $x>1$일 때 $f(x)$의 값은 항상 1보다 크다. □

평면 운동에서의 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$와 같이 주어졌을 때, 시각 t에서 점 P의 속도와 가속도는 다음과 같다.

① 속도 $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ ② 가속도 $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$

예제 90. 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$로 나타내어질 때, 점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 구하여라.

풀이 x, y의 도함수와 이계도함수를 구하면

$$\frac{dx}{dt}=1-\cos t,\ \frac{dy}{dt}=\sin t,\ \frac{d^2x}{dt^2}=\sin t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\cos t$$

이다. 따라서

점 P의 시각 t에서의 속도는 $(1-\cos t,\ \sin t)$,

점 P의 시각 t에서의 가속도는 $(\sin t,\ \cos t)$. □

10 로피탈의 정리와 테일러의 정리

로피탈의 정리와 테일러의 정리는 고급수학 과정이다.

분수의 극한을 구할 때 분모와 분자가 모두 0에 수렴하거나 모두 무한대로 발산하는 형태를 부정형이라고 부른다. 로피탈의 정리는 미분을 활용하여 부정형의 극한을 구하는 방법을 제시한다.

코시의 평균값 정리

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분 가능하며, 열린구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 x에 대하여 $g'(x) \neq 0$이면

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

를 만족시키는 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 존재한다.

증명 $h(x)=\{f(b)-f(a)\}g(x)-\{g(b)-g(a)\}f(x)$라고 하면 $h(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분 가능하며 $h(a)=h(b)$이다. 따라서 평균값 정리에 의하여 $h'(c)=0$ 즉

$$\{f(b)-f(a)\}g'(c)-\{g(b)-g(a)\}f'(c)=0$$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.
열린구간 $(a,\ b)$의 모든 x에 대하여 $g'(x) \neq 0$이므로 평균값 정리에 의하여 $g(a) \neq g(b)$이다. 따라서

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다. ■

부정형 0/0 꼴에 대한 로피탈의 정리

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 구간에서 미분 가능하다고 하자. $f(a)=g(a)=0$이고 a에 가까운 x에 대하여 $g'(x) \neq 0$이며$(x \neq a)$, 극한값

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

이 존재하면 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

증명 a에 매우 가까우며 $a<x$인 x를 택하자. 구간 $[a,\ x]$에서 코시의 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

를 만족시키며 $a<c<x$인 c가 존재한다. $g'(x) \neq 0,\ x \neq a$이므로 평균값 정리에 의하여 $g(x) \neq g(a)=0$이다. 또 $f(a)=g(a)=0$이므로

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

가 성립한다. 그런데 $x\to a+$이면 $c\to a+$이므로

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a+}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

이다.

마찬가지 방법으로 a에 매우 가까우며 $x<a$인 x에 대하여

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a-}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

가 성립한다. 따라서

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

이다. ■

예제 91. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$　　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

풀이 (1) $\lim_{x\to 1}\ln x=0,\ \lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로 로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}=1.$$

(2) $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0,\ \lim_{x\to 0}x^2=0$이므로 로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$$ □

부정형 ∞/∞ 꼴에 대한 로피탈의 정리

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 구간에서 미분 가능하다고 하자. $x\to a$일 때 $f(x)$와 $g(x)$가 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하고 a에 가까운 x에 대하여 $g'(x) \neq 0$이며$(x \neq a)$, 극한값

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

가 존재하면 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

참고 로피탈의 정리는 0/0꼴과 ∞/∞꼴 모두 '$x\to a$'를

$$x\to a+,\quad x\to a-,\quad x\to\infty,\quad x\to -\infty$$

중 어느 것으로 바꾸어도 성립함이 알려져 있다. □

예제 92. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$을 구하여라.

풀이 $\lim_{x\to\infty}x^2=\infty,\ \lim_{x\to\infty}e^x=\infty$이므로 로피탈의 정리에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}$$

이다. 또 $\lim_{x\to\infty}2x=\infty,\ \lim_{x\to\infty}e^x=\infty$이므로 다시 로피탈의 정리를 적용하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$ □

함수 $f(x)$가 $x=a$를 포함하는 열린구간에서 미분 가능할 때 곡선 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 곡선의 접선을 나타내는 일차함수 $g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$는 함수 $f(x)$의 근사함수이다. 즉 $x=a$의 근방에서 $f(x)$는 일차함수

$$g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

와 매우 가깝다는 것이다. 이 일차함수를 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 일차근사식이라고 부른다.

일반적으로 $x=a$를 포함하는 열린구간에서 함수 $y=f(x)$가 n번 미분 가능할 때 다음과 같은 n차 다항식

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 n차 **테일러 다항식**이라고 부른다. 이때 $f(x)$와 $P_n(x)$는 $x=a$에서 n차까지의 도함수의 값이 일치한다. 즉

$$f(a)=P_n(a),\ f'(a)=P_n{}'(a),\ \cdots,\ f^{(n)}(a)=P_n^{(n)}(a)$$

가 성립한다.

예제 93. $n=3$, $n=5$일 때 $f(x)=\sin x$의 $x=0$에서의 테일러 다항식을 구하여라.

풀이 $f(x)=\sin x$에 대하여

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f^{(3)}(x)=-\cos x,$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x,\ f^{(5)}(x)=\cos x$$

이므로

$$f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1},\ f^{(2n)}(0)=0$$

이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$P_3(x)=x-\frac{x^3}{3!},\ P_5(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$ □

일반적으로 함수 $f(x)$와 다항식 $P_n(x)$의 차

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

를 n차 나머지 항이라고 부른다. 만약 함수 $f(x)$가 임의 횟수로 미분 가능하면 테일러 다항식의 수열 $\{P_n(x)\}$를 얻을 수 있다. $P_n(x)=f(x)-R_n(x)$이므로 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$이면

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\lim_{n\to\infty}\{f(x)-R_n(x)\}=f(x)-\lim_{n\to\infty}R_n(x)=f(x)$$

가 되어 테일러 다항식 $P_n(x)$는 함수 $f(x)$에 수렴한다. 이때 테일러 다항식의 극한으로 주어지는 급수

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

를 $f(x)$의 $x=a$에서의 **테일러 급수**라고 부른다. ($a=0$일 때에는 **맥클라린 급수**라고부른다.)

다음 테일러의 정리는 함수 $f(x)$가 적당한 조건을 만족시킬 때 나머지항 $R_n(x)$의 모양과 오차의 한계를 보여준다.

테일러의 정리

함수 $y=f(x)$가 $x=a$를 포함하는 열린구간 I에서 $(n+1)$번 미분 가능하고 $(n+1)$계도함수가 연속이면 열린구간 I에 속하는 임의의 x에 대하여

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

을 만족시키는 c가 a와 x 사이에 존재한다. 또 a와 x 사이의 임의의 t에 대하여

$$\left|f^{(n+1)}(t)\right|\le M$$

을 만족시키는 상수 M이 존재하면 나머지항

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

은 부등식

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

을 만족시킨다.

증명 나머지항 $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$를 이용하여 t에 대한 함수 $g(t)$를 다음과 같이 정의하자.

$$g(t)=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n-R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}$$

그러면

$$g(x)=f(x)-P_n(x)-R_n(x)=0,\ g(x)=0$$

이므로 닫힌구간 $[a,\ x]$에서 평균값 정리를 적용하면 a와 x 사이에 $g'(c)=0$인 c가 존재한다. 그런데

$$g'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+R_n(x)\frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

이므로 $t=c$를 대입하면 $g'(c)=0$으로부터

$$R_n(x)\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

을 얻는다. 또 a와 x 사이의 임의의 t에 대하여

$$\left|f^{(n+1)}(t)\right|\le M$$

인 상수 M이 존재하면 다음이 성립한다.

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$ ■

예제 94. 함수 $f(x)=e^x$의 $x=0$에서의 테일러 급수를 구하고 n차 나머지항 $R_n(x)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$임을 보여라.

풀이 $f(x)=e^x$, $f(0)=1$이다. 또한 임의의 자연수 n에 대하여 $f^{(n)}(x)=e^x$이므로 $f^{(n)}(0)=1$이다. 따라서 $x=0$에서 함수 $f(x)=e^x$의 테일러 급수는

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

이다.

이때 n차 나머지항 $R_n(x)$는 0과 x 사이의 적당한 c에 대하여

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

이 성립한다. $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$임을 보이기 위해서는

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$$

임을 보이면 충분하다.

$$|R_n(x)|=\frac{e^c}{(n+1)!}|x|^{n+1}=e^c\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

이므로 주어진 실수 x에 대하여 $|x|<k$인 자연수 k를 택하면 $n>k$인 자연수 n에 대하여

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)n\cdots(k+1)k!}\le\frac{|x|^{n+1}}{k!\,k^{n-k+1}}=\frac{k^k}{k!}\left(\frac{|x|}{k}\right)^{n+1}$$

이고, $\frac{|x|}{k}<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|}{k}\right)^{n+1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$이다. □

예제 95. 함수 $f(x)=\ln(x+1)$의 $x=0$에서의 1차 테일러 다항식을 이용하여 $\ln 0.9$의 근삿값과 오차의 한계를 구하여라.

풀이 $x>-1$일 때

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}$$

이므로 함수 $f(x)$의 $x=0$에서의 1차 테일러 다항식은

$$P_1(x)=f(0)+f'(0)x=x$$

이다. 그러므로 $\ln 0.9$의 근삿값은

$$\ln 0.9=f(-0.1)\fallingdotseq P_1(-0.1)=-0.1$$

이다. 또한

$$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

이므로 $-0.1<c<0$인 c에 대하여

$$|f''(c)|=\left|\frac{1}{(c+1)^2}\right|\le\frac{1}{0.9^2}$$

이 성립한다. 따라서 테일러의 정리에 의하여 오차의 한계는

$$|R_1(-0.1)|=\left|\frac{f''(c)}{2!}\cdot(-0.1)^2\right|\le\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{0.9^2}\cdot 0.1^2=\frac{1}{162}$$

이다. □

참고 여러 가지 함수의 테일러 급수는 다음과 같다.

- $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\cdots$ (x는 모든 실수)
- $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\cdots$ (x는 모든 실수)
- $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ (x는 모든 실수)
- $\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\cdots$ ($|x|<1$)

11 부정적분

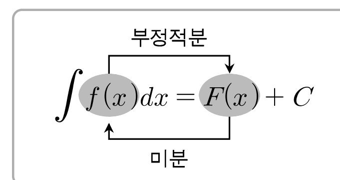
함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때 $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분** 또는 **원시함수**라고 부르며 이것을 기호로

$$\int f(x)dx$$

로 나타낸다.

> **부정적분**
> $F(x)$가 $f(x)$의 부정적분이면 $F(x)$에 상수를 더하여 만든 함수도 $f(x)$의 부정적분이다. 즉
> $$\int f(x)dx=F(x)+C\quad(C\text{는 상수})$$
> 이다. 이때 $f(x)$를 **피적분함수**, C를 **적분상수**, x를 **적분변수**라고 부른다.

미분과 부정적분의 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 **적분한다**고 말하고, 그 계산법을 **적분법**이라고 부른다.

참고 다음은 모두 $3x^2$의 부정적분들이다.

$$x^3-1,\quad x^3,\quad x^3+1,\quad x^3+2$$

왜냐하면 위 함수들은 각각 x에 대하여 미분하면 모두 $3x^2$이 되기 때문이다. 이렇게 한 함수의 부정적분은 하나만 있는 것이 아니라 여러 개가 있는데, 이들은 모두 상수를 제외하고는 동일한 형태이다. 따라서 $3x^2$의 부정적분을

$$x^3+C\quad(C\text{는 상수})$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. □

부정적분 공식은 미분 공식을 거꾸로 생각하여 얻을 수 있다. 다항함수의 부정적분은 다음과 같다.

> **다항함수의 부정적분**
> (1) $\int k\,dx=kx+C$ (단, k는 0이 아닌 상수)
> (2) $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$
> (단, n은 자연수이고 C는 적분상수)

보기 96. (1) $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$ (C는 상수)

(2) $\int 4x^3dx=x^4+C$ (C는 상수)

(3) $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$ (C는 상수)

(4) $\int 1dx=x+C$ (C는 상수) □

참고 $\int 1\,dx$는 간단히 $\int dx$로 나타내기도 한다.

예제 97. 다음 등식을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라. (단, C는 적분상수이다.)

(1) $\int f(x)dx = 3x^2 - 4x + C$

(2) $\int f(x)dx = x^3 - 2x^2 + 5x + C$

풀이 양변을 미분하여 구한다.

(1) $f(x) = (3x^2 - 4x + C)' = 6x - 4$.

(2) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x + C)' = 3x^2 - 4x + 5$. □

유리항의 적분공식

① $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (단, $n \neq -1$)

② $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

예제 98. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{2x^2+1}{x}dx$　　(2) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$

풀이 (1) $\int \frac{2x^2+1}{x}dx = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx = x^2 + \ln|x| + C$

(2) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx = \int \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x}dx$

$= \int \left(1 - 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\right)dx = x - 4x^{\frac{1}{2}} + \ln|x| + C$

$= x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C$ □

예제 99. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (\sin x + 3\cos x)dx$　　(2) $\int \frac{2\cos^3 x - 4}{\cos^2 x}dx$

풀이 (1) $\int (\sin x + 3\cos x)dx$

$= \int \sin x\,dx + 3\int \cos x\,dx$

$= -\cos x + 3\sin x + C$

(2) $\int \frac{2\cos^3 x - 4}{\cos^2 x}dx = \int (2\cos x - 4\sec^2 x)dx$

$= 2\int \cos x\,dx - 4\int \sec^2 x\,dx$

$= 2\sin x - 4\tan x + C$ □

부정적분과 미분의 관계

함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\} = f(x)$

(2) $\int \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx = f(x) + C$ (단, C는 적분상수)

예제 100. 함수 $f(x) = x^3 - 2x$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}$　　(2) $\int \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx$

풀이 (1) $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int (x^3 - 2x)dx\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4 - x^2 + C\right) = x^3 - 2x$.

(2) $\int \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx = \int \left\{\frac{d}{dx}(x^3 - 2x)\right\}dx$

$= \int (3x^2 - 2)dx = x^3 - 2x + C$. □

부정적분의 성질은 대부분 미분의 성질로부터 유도된다.

부정적분의 성질

(1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k는 0이 아닌 상수)

(2) $\int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(3) $\int \{f(x) - g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

증명 $f(x)$와 $g(x)$의 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하자.

(1) $\{kF(x)\}' = kf(x)$.

(2) $\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$이므로

$\int \{f(x) + g(x)\}dx = F(x) + G(x) = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(3) $\{F(x) - G(x)\}' = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)$이므로

$\int \{f(x) - g(x)\}dx = F(x) - G(x) = \int f(x)dx - \int g(x)dx$ ■

예제 101. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (x-1)^3 dx$　　(2) $\int \frac{x^3+1}{x+1}dx$

(3) $\int (x^2 + tx + t^2)dt$　　(4) $\int \frac{x^2}{x-1}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$

풀이 (1) (준식)$= \int (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)dx$

$= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C$.

(2) (준식)$= \int (x^2 - x + 1)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$.

(단, $x \neq -1$)

(3) $\int (x^2 + tx + t^2)dt = x^2 t + \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{3}t^3 + C$.

(4) (준식)$= \int \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right)dx$

$= \int \frac{x^3 - 1}{x-1}dx$

$= \int (x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C$. (단, $x \neq 1$) □

치환적분

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C$$

증명 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

이므로

$$\int f'(g(x))g'(x)dx = \int \frac{d}{dx}(f(g(x)))dx$$
$$= f(g(x)) + C$$

이다. ■

예제 102. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (x+1)^2 dx$ (2) $\int (2x+1)^2 dx$

(3) $\int 4(2x+1)(x^2+x-1)^3 dx$

풀이 (1) $\int (x+1)^2 dx = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C.$

(2) $\int (2x+1)^2 dx = \frac{1}{3}(2x+1)^3 \cdot \frac{1}{2} + C.$

(3) $f(x) = x^4$, $g(x) = x^2+x-1$이라고 하면

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{d}{dx}(x^2+x-1)^4$$
$$= 4(x^2+x-1)^3(2x+1)$$

이다. 따라서 주어진 부정적분을 계산하면

$$\int 4(2x+1)(x^2+x-1)^3 dx = f(g(x))$$
$$= (x^2+x-1)^4 + C$$

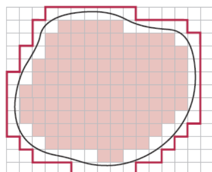
이다. □

참고 위 예제의 (1), (2)를 통해 다음 공식을 알 수 있다.

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} \cdot \frac{1}{a} + C$$

12 정적분

다각형의 넓이는 삼각형이나 사각형으로 분할하여 그 분할된 넓이의 합으로 구할 수 있다. 그러나 직선과 곡선으로 둘러싸인 도형은 삼각형이나 사각형만으로는 완전히 분할할 수 없다.



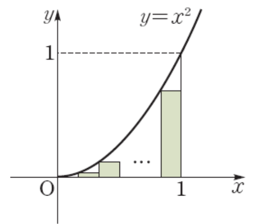
오른쪽 그림과 같이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S, 곡선의 내부에 있는 정사각형들의 넓이의 합을 m, 곡선의 내부와 곡선의 경계선을 포함하는 정사각형들의 넓이의 합을 M이라고 하면 $m \le S \le M$이다. 이때 정사각형의 크기를 한없이 작게 하면 m과 M은 도형의 넓이 S에 가까워지므로, m과 M의 극한을 구하면 이 도형의 넓이를 구할 수 있다.

구분구적법

다음과 같은 방법으로 도형의 넓이 또는 부피를 구하는 방법을 **구분구적법**이라고 부른다.

(ⅰ) 주어진 도형을 충분히 작은 n개의 기본도형으로 분할한다.
(ⅱ) 기본도형의 넓이 또는 부피의 합을 구한다.
(ⅲ) 위 (ⅱ)에서 구한 합의 $n \to \infty$일 때의 극한값을 구한다.

예제 103. 곡선 $y=x^2$과 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 오른쪽 그림과 같이 구간 [0, 1]을 n등분하고 곡선의 아래쪽에 직사각형을 만들어 구분구적법으로 구하여라.



풀이 구간 [0, 1]을 n등분하면 양 끝점을 포함하여 각 분점의 x좌표는 차례로 다음과 같다.

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}=1$$

이때 각각의 직사각형의 높이는 각 구간의 왼쪽 끝에서의 함숫값이므로

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

각 구간의 길이는 $\frac{1}{n}$이므로 그림에서 색칠된 부분의 넓이 S_n은

$$S_n = \frac{1}{n}\cdot 0 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2\}$$
$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

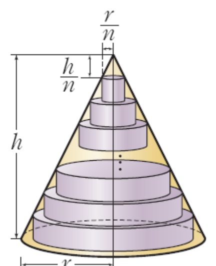
여기서 n이 한없이 커질 때, S_n은 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 S와 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$ □

예제 104. 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원뿔의 부피를 구분구적법으로 구하여라.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 n등분하고 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 원뿔을 자르면 각 단면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례로 다음과 같다.



$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n}$$

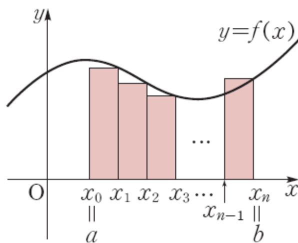
각 단면을 밑면으로 하고 높이가 $\frac{h}{n}$인 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합 V_n은

$$V_n=\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\frac{h}{n}+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\frac{h}{n}+\cdots+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\frac{h}{n}$$
$$=\frac{\pi r^2 h}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{\pi r^2 h}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{\pi r^2 h}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 도형의 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi r^2 h}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi r^2 h}{3}$$ □

함수 $f(x)$의 그래프에 의해 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법으로 구해보자. 함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라고 하자.



구간 $[a, b]$를 n등분하고 양 끝점을 포함하여 각 분점의 x좌표를 차례로

$$a=x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라고 하며

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

라고 할 때, 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

를 $y=f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라고 부르며, 이것을 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

로 나타낸다. 정적분의 기호가 부정적분이 기호와 동일한 이유는 뒤에서 살펴볼 정적분의 기본 정리 때문이다.

연속함수의 정적분

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

정적분

$$\int_a^b f(x)dx$$

의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 **적분한다**고 말한다. 이때 a를 **아래끝**, b를 **위끝**이라고 부르며 구간 $[a, b]$를 **적분구간**이라고 부른다.

참고 정적분

$$\int_a^b f(x)dx$$

에서 x를 **적분변수**라고 부른다. 이때 적분변수는 다른 것으로 바뀌어도 상관없다. 예를 들어

$$\int_a^b f(t)dt,\quad \int_a^b f(y)dy,\quad \int_a^b f(z)dz$$

는 모두 동일한 적분을 나타낸다. □

예제 105. 정적분의 정의를 이용하여 $\int_0^2 x^2dx$의 값을 구하여라.

풀이 $f(x)=x^2$이라고 하면 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 2]$에서 연속이다. 정적분의 정의에서 $a=0$, $b=2$라고 하면

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n},$$
$$x_k=a+k\Delta x=\frac{2k}{n},$$
$$f(x_k)={x_k}^2=\left(\frac{2k}{n}\right)^2=\frac{4k^2}{n^2}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\int_0^2 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4k^2}{n^2}\cdot\frac{2}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}=\frac{8}{3}$$ □

참고 연속인 함수는 정적분가능하다. 그러나 정적분가능한 모든 함수가 연속인 것은 아니다. 즉

(미분가능) ⇒ (연속) ⇒ (정적분가능)

이지만

(미분가능) ⇍ (연속) ⇍ (정적분가능)

이다. 예를 들어 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 $x=0$에서 미분 불가능하다. 또한

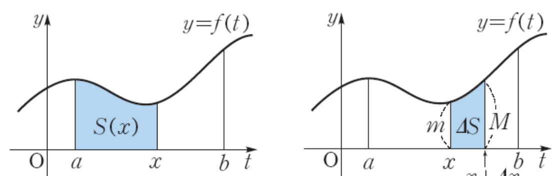
$$f(x)=\begin{cases}3 & (x\ge 1)\\ 0 & (x<1)\end{cases}$$

는 $[0, 2]$에서 정적분 가능하고 적분값은 3이지만 $x=1$에서 불연속이다. 한편

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\text{는 유리수})\\ 0 & (x\text{는 무리수})\end{cases}$$

는 $a<b$인 임의의 구간 $[a, b]$에서 적분 불가능하다. □

정적분과 부정적분의 관계를 살펴보자. 아래 그림과 같이 연속함수 $f(t)$의 그래프와 t축, 그리고 $t=a$, $t=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(x)$라고 하자.



이때 $S(x+\Delta x)-S(x)$의 값은 가로가 $|\Delta x|$이고 높이가 $f(x)$인 직사각형의 넓이 $f(x)|\Delta x|$에 가깝다. 즉 Δx가 절댓값이 작은 양수이면

$$S(x+\Delta x)-S(x)\fallingdotseq f(x)\Delta x$$

이다.

Δx의 절댓값이 작을수록 양변의 오차는 줄어든다. 따라서

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=f(x)$$

가 성립한다. 좌변은 $S(x)$의 도함수와 동일하므로

$$\frac{d}{dx}S(x)=f(x)$$

임을 알 수 있다. 그런데 $S(x)$는 $f(t)$의 그래프와 t축, 그리고 $t=a$, $t=x$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 위 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

적분과 미분의 관계

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하고, 위 식의 양변의 부정적분을 구하면

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)+C \qquad (*)$$

이다. 식 $(*)$의 $x=a$를 대입하면

$$0=\int_a^a f(t)dt=F(a)+C$$

이므로 $C=-F(a)$이다. 다시 식 $(*)$의 양변에 $x=b$를 대입하면

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)+C=F(b)-F(a)$$

이다. 따라서 다음 정리를 얻는다.

정적분의 기본 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, $F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분일 때

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

가 성립한다. 이때 $F(b)-F(a)$를 $[F(x)]_a^b$로 나타낸다.

정의 **106.** 다양한 경우에 적분을 하기 위하여 다음과 같이 정의한다.

- $a=b$일 때 $\int_a^b f(x)dx=0$,
- $a>b$일 때 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

참고 정적분의 기본 정리는 정적분을 계산할 때 미분의 역연산을 이용하여 쉽게 할 수 있다는 것을 말해준다. 또한 정적분의 여러 가지 성질이 부정적분의 성질과 비슷하다는 것도 말해준다. 완전히 정의가 다른 정적분과 부정적분이 이렇게 밀접한 관계를 가지고 있다는 사실은 정말 놀라운 일이다.

13 적분의 성질

정적분의 여러 가지 성질은 정적분의 정의와 부정적분의 성질로부터 얻어진다.

정적분의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때 다음이 성립한다.

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (k는 상수)

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

④ $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

예제 107. 다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_1^3 (t^2-2t+1)dt$ (2) $\int_0^2 (3x^2-6x+2)dx$

(3) $\int_{-1}^2 (t-1)^2dt$ (4) $\int_1^0 (s-1)(s^2+s+1)ds$

풀이 (1) (준식)$=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+t\right]_1^3$

$=\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2+3\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3-1^2+1\right)=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$.

(2) (준식)$=\left[x^3-3x^2+2x\right]_0^2$

$=(2^3-3\cdot 2^2+2\cdot 2)-(0^3-3\cdot 0^2+2\cdot 0)=0$.

(3) (준식)$=\left[\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_{-1}^2=\frac{1}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)=3$.

(4) (준식)$=-\int_0^1 (s-1)(s^2+s+1)ds$

$=-\int_0^1 (s^3-1)ds=-\left[\frac{1}{4}s^4-s\right]_0^1=-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$. □

예제 108. 다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x-1}dx+\int_0^{-1}\frac{1}{t-1}dt$

(2) $\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+1)dx+\int_{-1}^1 (y^3+3y^2+1)dy$

풀이 (1) (준식)$=\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x-1}dx-\int_{-1}^0 \frac{1}{x-1}dx$

$=\int_{-1}^0 \frac{x^3-1}{x-1}dx=\int_{-1}^0 (x^2+x+1)dx=\frac{5}{6}$.

(2) (준식)$=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+1)dx+\int_{-1}^1 (x^3+3x^2+1)dx$

$=\int_{-2}^1 (x^3+3x^2+1)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x\right]_{-2}^1$

$=\frac{9}{4}-(-6)=\frac{33}{4}$. □

예제 109. 다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_{-2}^{1}|x+1|dx$ (2) $\int_{0}^{2}|x^2-x|dx$

풀이 절댓값 안의 식이 0이 되는 점을 기준으로 구간을 나눈다.

(1) (준식)$=\int_{-2}^{-1}|x+1|dx+\int_{-1}^{1}|x+1|dx$

$=\int_{-2}^{-1}(1-x)dx+\int_{-1}^{1}(x+1)dx$

$=\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-1}^{1}$

$=\left\{\frac{1}{2}-0\right\}+\left\{\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{5}{2}.$

(2) (준식)$=\int_{0}^{1}|x^2-x|dx+\int_{1}^{2}|x^2-x|dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=1.$ □

참고 $f(x)$가 우함수이고 $g(x)$가 기함수이며 a가 양수일 때

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx,\quad \int_{-a}^{a}g(x)dx=0$$

이 성립한다. □

예제 110. 함수 $f(x)$가 $[-1,\ 1]$에서 정적분 가능하고 우함수이며 $\int_{0}^{1}f(x)dx=-1$일 때

$$\int_{-1}^{1}(x^3-2x-5)f(x)dx$$

를 구하여라.

풀이 $f(x)$가 우함수라는 것은 그래프가 y축에 대하여 대칭이라는 것이다. 즉 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$가 성립한다는 것을 의미한다. 따라서

$$\int_{1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx=-2$$

가 성립한다. 이 식을 이용하여 주어진 적분을 계산하자.

$\int_{-1}^{1}(x^3-2x-5)f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx-2\int_{-1}^{1}xf(x)dx-5\int_{-1}^{1}f(x)dx$

여기서 $x^3f(x)$와 $xf(x)$는 모두 기함수이므로

$$\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx=0,\quad \int_{1}^{1}f(x)dx=0$$

이다. 따라서

$$\int_{-1}^{1}(x^3-2x-5)f(x)dx=-5\int_{1}^{1}f(x)dx=10.$$ □

참고 우함수와 기함수의 곱의 결과는 다음과 같다.

(우함수)×(우함수)=(우함수)

(우함수)×(기함수)=(기함수)

(기함수)×(기함수)=(우함수)

정적분으로 정의된 함수의 미분

① $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(t)dt=f(x)$

② $\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+a}f(t)dt=f(x+a)-f(x)$

증명 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

① $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(t)dt=\frac{d}{dx}[F(t)]_a^x=\frac{d}{dx}[F(x)-F(a)]$

$=F'(x)=f(x)$

② $\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+a}f(t)dt=\frac{d}{dx}[F(t)]_x^{x+a}=\frac{d}{dx}[F(x+a)-F(x)]$

$=\frac{d}{dx}F(x+a)-\frac{d}{dx}F(x)=F'(x+a)-F'(x)$

$=f(x+a)-f(x).$ ■

예제 111. 다음 함수를 x에 대하여 미분하여라.

(1) $\int_{2}^{x}(2t^2-3)dt$ (2) $\int_{x}^{x+2}(t^2-3t+2)dt$

풀이 (1) $2x^2-3$ (2) $4x-2$ □

정적분으로 정의된 함수의 극한

① $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x}f(t)dt=f(a)$

② $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{a}^{x+a}f(t)dt=f(a)$

증명 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

① $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{[F(t)]_a^x}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$

$=F'(a)=f(a).$

② $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{a}^{x+a}f(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{[F(t)]_a^{x+a}}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+a)-F(a)}{x}=F'(a)=f(a).$ ■

예제 112. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x}(t^2+2t)dt$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{2}^{2+x}(3t+4)dt$

풀이 (1) $f(t)=t^2+2t$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

(준식)$=\lim_{x\to 1}\frac{[F(t)]_1^x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=F'(1)=f(1)=3.$

(2) $f(t)=3t+4$로 놓고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면

(준식)$=\lim_{x\to 0}\frac{[F(t)]_2^{2+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{F(2+x)-F(2)}{x}$

$=F'(2)=f(2)=6+4=10.$ □

정적분과 무한급수

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$

② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}=\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_a^p f(x+a)dx$

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{q}{n}=q\int_0^1 f(a+px)dx$

예제 113. 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$$

풀이 무엇을 적분변수로 정하느냐에 따라 다르게 풀 수 있다.

방법 1. $1+\frac{2k}{n}$를 x로 나타내는 경우

- $1+\frac{2k}{n}$를 x로, k의 계수 $\frac{2}{n}$를 dx로 나타낸다.
- $k=1$이면서 $n\to\infty$일 때 $x=1$이고, $k=n$일 때 $x=3$이므로 적분구간은 $[1,\ 3]$이다.

따라서 (준식)$=\int_1^3 x^2dx=\frac{26}{3}$.

방법 2. $\frac{2k}{n}$를 x로 나타내는 경우

- $\frac{2k}{n}$를 x로, k의 계수 $\frac{2}{n}$를 dx로 나타낸다.
- $k=1$이면서 $n\to\infty$이면 $x=0$이고, $k=n$이면 $x=2$이므로 적분구간은 $[0,\ 2]$이다.

따라서 (준식)$=\int_0^2(1+x)^2dx=\frac{26}{3}$.

방법 3. $\frac{k}{n}$를 x로 나타내는 경우

- $\frac{k}{n}$를 x로, k의 계수 $\frac{1}{n}$을 dx로 나타낸다.
- $k=1$이면서 $n\to\infty$이면 $x=0$이고, $k=n$이면 $x=1$이므로 적분구간은 $[0,\ 1]$이다.

따라서 (준식)$=2\int_0^1(1+2x)^2dx=\frac{26}{3}$. □

예제 114. 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$

풀이 (1) $\frac{k}{n}$를 x로 $\frac{1}{n}$을 dx로 나타내면 적분구간은 $[0,\ 1]$이다. 따라서 (준식)$=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^2\frac{2}{n}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\frac{3}{n}$에서 $1+\frac{3k}{n}$을 x로, $\frac{3}{n}$을 dx로 나타내면 적분구간은 $[1,\ 4]$이다.

따라서 (준식)$=\frac{2}{3}\int_1^4 x^3dx=\frac{85}{2}$. □

14 치환적분과 부분적분

합성함수의 미분법을 거꾸로 하면 다음과 같은 적분 공식을 얻는다.

치환적분법

미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

특히

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

참고 치환적분법은

$$\int f'(g(x))g'(x)dx=f(g(x))+C$$

로 나타낼 수도 있다. □

예제 115. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(2x+1)^3dx$ (2) $\int\frac{1}{(2x-3)^2}dx$

풀이 (1) $2x+1=t$로 놓으면 $x=\frac{t-1}{2}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로

$$\int(2x+1)^3dx=\int t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{1}{8}t^4+C$$
$$=\frac{1}{8}(2x+1)^4+C.$$

(2) $2x-3=t$로 놓으면 $x=\frac{t+3}{2}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로

$$\int\frac{1}{(2x-3)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{2t}+C$$
$$=-\frac{1}{2(2x-3)}+C.$$ □

예제 116. 부정적분 $\int\sin^3x\cos x\,dx$를 구하여라.

풀이 $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int\sin^3x\cos x\,dx=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}\sin^4x+C$$ □

예제 117. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int\frac{2x}{x^2-1}dx$ (2) $\int\tan x\,dx$

풀이 (1) $(x^2-1)'=2x$이므로

$$\int\frac{2x}{x^2-1}dx=\int\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}dx=\ln|x^2-1|+C$$

(2) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이고, $(\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx$$
$$=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+C$$ □

예제 118. 부정적분 $\int \frac{1}{x(x+1)}dx$를 구하여라.

풀이 $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$이므로

$$\int \frac{1}{x(x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x+1|+C=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$$ □

예제 119. 부정적분 $\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2}dx$를 구하여라.

풀이 $\frac{5x-7}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$라고 하면

$$\frac{5x-7}{x^2-3x+2}=\frac{(a+b)x-2a-b}{x^2-3x+2}$$

이므로

$$a+b=5,\ -2a-b=-7$$

이다. 이것을 풀면 $a=2$, $b=3$이다. 따라서

$$\frac{5x-7}{x^2-3x+2}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}$$

이므로

$$\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx$$
$$=2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$$
$$=\ln|(x-1)^2(x-2)^3|+C$$ □

치환적분법을 이용한 정적분

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)d(x)=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

예제 120. 정적분 $\int_0^1 2e^{2x+1}dx$를 구하여라.

풀이 $2x+1=t$로 놓으면 $x=\frac{t-1}{2}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^1 2e^{2x+1}dx=\int_1^3 e^t dt=\left[e^t\right]_1^3=e^3-e$$ □

예제 121. 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx$를 구하여라.

풀이 $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx=\int_0^1 t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$ □

예제 122. $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$를 구하여라.

풀이 $x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$이고,

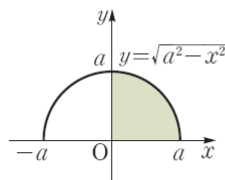
$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$ □

참고 $a>0$일 때

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

는 반지름의 길이가 a인 사분원의 넓이와 같다.



부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

증명 $y=f(x)g(x)$일 때

$$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이므로 양변을 x에 대하여 적분하면

$$f(x)g(x)+C=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$$

이다. 이것을 정리하면

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

이다. (적분상수는 우변의 부정적분에 포함되어 있다.) ■

예제 123. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \ln x\,dx$ (2) $\int e^x\sin x\,dx$

풀이 (1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx=x\ln x-\int dx$$
$$=x\ln x-x+C$$

(2) $f(x)=e^x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=e^x$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int e^x\sin x\,dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

부분적분법을 한 번 더 적용하면

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ②$$

②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\int e^x\sin x\,dx=-e^x\cos x+\left(e^x\sin x-\int e^x\sin dx\right),$$
$$2\int e^x\sin x\,dx=e^x(\sin x-\cos x)$$

따라서 구하는 부정적분은

$$\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$ □

예제 124. 부정적분 $\int xe^x dx$를 구하여라.

풀이 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면
$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$$ □

부분적분법을 이용한 정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

예제 125. 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^1 xe^x dx$　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx$

풀이 (1) $\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = 1$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx = [x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)dx$

$= 0 - [-\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ □

15 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 적분

지금까지 살펴본 미분법과 여러 가지 적분법을 활용하여 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 적분을 구해보자.

삼각함수의 부정적분

① $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

② $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

③ $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

④ $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

⑤ $\int \mathrm{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$

예제 126. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \tan^2 x\, dx$　　(2) $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx$

풀이 (1) $\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + C$

(2) $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} dx$

$= \int \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x} dx$

$= \int (1-\sin x)dx = x + \cos x + C$ □

예제 127. 부정적분 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$를 구하여라.

풀이 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1-\cos x}{2} dx$

$= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2}\cos x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$ □

지수함수와 로그함수의 부정적분 (단, $a>0$, $a \neq 1$)

① $\int e^x dx = e^x + C$

② $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

③ $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C$

④ $\int \log_a x\, dx = \frac{x\ln x - x}{\ln a} + C$

예제 128. 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int e^{x+2} dx$　　(2) $\int \frac{e^{2x} - x^2}{e^x - x} dx$

풀이 (1) $\int e^{x+2} dx = \int e^x \cdot e^2 dx = e^2 \int e^x dx$

$= e^2 e^x + C = e^{x+2} + C$

(2) $\int \frac{e^{2x} - x^2}{e^x - x} dx = \int \frac{(e^x + x)(e^x - x)}{e^x - x} dx$

$= \int (e^x + x)dx = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$ □

예제 129. 부정적분 $\int \sin^3 x \cos x\, dx$를 구하여라.

풀이 $\frac{d}{dx}\sin^4 x = 4\sin^3 x \cdot \cos x$이므로

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

참고로 이 풀이를 예제 116번과 비교해 보아라. □

16 적분의 활용

적분을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

정적분을 이용한 부등식의 증명

① $a<b$이고 $f(x) \geq 0$일 때,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

② $a<b$이고 $f(x) \leq g(x)$일 때,

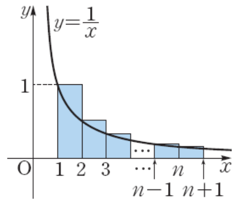
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

예제 130. n이 자연수일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

풀이 $f(x)=\dfrac{1}{x}$이라고 하면 함수 $f(x)$는 $x>0$일 때 감소한다.

따라서 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=n+1$로 둘러싸인 넓이는 오른쪽 그림의 직사각형의 넓이의 합보다 작다. 즉



$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

이다. 그런데

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^{n+1}=\ln(n+1)$$

이므로

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$ □

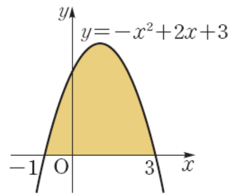
> **곡선과 축 사이의 넓이**
> 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 다음과 같다.
> $$S=\int_a^b|f(x)|dx$$

예제 131. 다음 도형의 넓이를 구하여라.

(1) 곡선 $y=-x^2+2x+3$과 x축으로 둘러싸인 도형

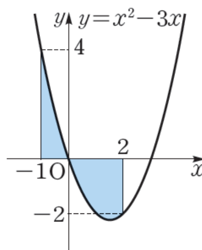
(2) 곡선 $y=x^2-3x$와 x축 및 두 직선 $x=-1$과 $x=2$로 둘러싸인 도형

풀이 (1) 주어진 곡선의 x절편은 -1과 3이고, 구간 $[-1,\ 3]$에서 $y\ge 0$이다. 따라서 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{-1}^3(-x^2+2x+3)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^3=\frac{32}{3}$$

(2) 구간 $[-1,\ 0]$에서 $y\ge 0$이며 구간 $[0,\ 2]$에서 $y\le 0$이다. 따라서 구하는 넓이 S는

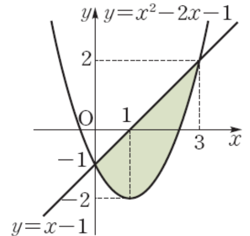


$$S=\int_{-1}^0(x^2-3x)\,dx+\int_0^2(x^2-3x)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^0-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_0^2$$
$$=\frac{31}{6}$$ □

> **두 곡선 사이의 넓이**
> 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$와 $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는
> $$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx.$$

예제 132. 직선 $y=x-1$과 곡선 $y=x^2-2x-1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

풀이 방정식 $x^2-2x-1=x-1$을 풀면 $x=0$, $x=3$이므로 주어진 직선과 곡선의 교점의 x좌표는 0, 3이다. 구간 $[0,\ 3]$에서



$$x-1\ge x^2-2x-1$$

이다. 따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^3\{(x-1)-(x^2-2x-1)\}dx$$
$$=\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$ □

예제 133. 다두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\cos x$ 및 두 직선 $x=0$과 $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

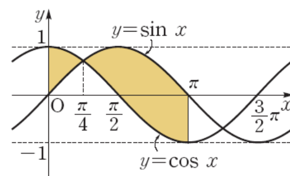
풀이 구간 $[0,\ \pi]$에서 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표는

$$\sin x=\cos x$$

를 만족시키는 점이다. 위 식을 변형하면

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

에서 $x=\dfrac{\pi}{4}$이다.



구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 $\sin x\le\cos x$이다.

구간 $\left[\dfrac{\pi}{4},\ \pi\right]$에서 $\sin x\ge\cos x$이다.

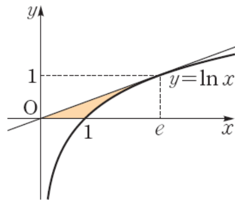
따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$$
$$=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=2\sqrt{2}$$ □

예제 134. 곡선 $y=\ln x$와 점 $(e,\ 1)$에서 이 곡선에 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

풀이 $y'=\dfrac{1}{x}$이므로 점 $(e,\ 1)$에서 주어진 곡선에 그은 접선의 방정식은 $y-1=\dfrac{1}{e}(x-e)$, 즉 $y=\dfrac{1}{e}x$이다.

그러므로 주어진 도형은 곡선 $x=ey$와 두 직선 $x=ey$와 $y=0$으로 둘러싸인 도형이다.



따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1 (e^y - ey)dy=\left[e^y-\frac{e}{2}y^2\right]_0^1=\frac{e}{2}-1 \qquad \square$$

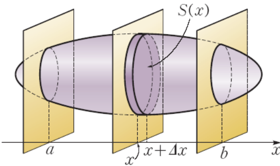
입체도형의 부피

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

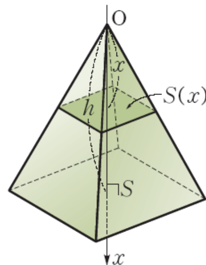
이 공식은 $S(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때에 사용한다.

참고 적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 때에는 적분 구간과 단면의 넓이 함수 $S(x)$를 구하는 것이 중요하다.



예제 135. 정적분을 이용하여 밑면의 넓이가 S이고 높이가 h인 사각뿔의 부피를 구하여라.

풀이 오른쪽 그림과 같이 사각뿔의 꼭짓점 O를 원점, 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선을 x축으로 정하자.



x좌표가 x인 점을 지나 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x) : S = x^2 : h^2$$

이므로 $S(x)=\dfrac{x^2}{h^2}S$이다. 따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h \frac{x^2}{h^2}Sdx=\frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{1}{3}Sh \qquad \square$$

회전체의 부피

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$를 x축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V는

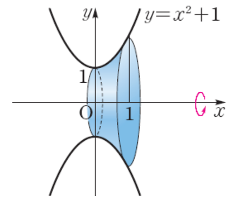
$$V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2dx$$

예제 136. 곡선 $y=x^2+1$, x축, y축, 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형을 x축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.

풀이 $\pi\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)^2dx$

$$=\pi\int_0^1 (x^4+2x^2+1)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{28}{15}\pi \qquad \square$$



곡선의 길이

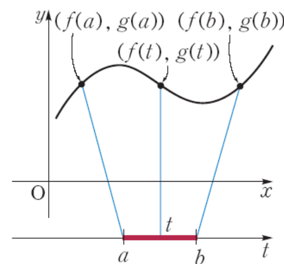
① 곡선 $x=f(t),\ y=g(t)\ \ (a\le t\le b)$의 길이 l은

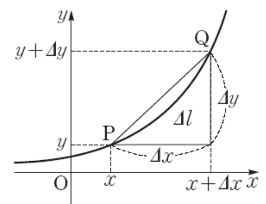
$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

② 곡선 $y=f(x)\ \ (a\le x\le b)$의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

증명 곡선의 길이 l은 시각 t에서의 위치가 x좌표는 $x=f(t)$이고 y좌표는 $y=g(t)$인 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 좌표평면 위에서 시각 $t=a$부터 시각 $t=b$까지 움직인 거리와 같다.





위 오른쪽 그림과 같이 매개변수가 t부터 $t+\Delta t$까지 변할 때, 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 점 $\mathrm{Q}(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$까지 움직인다고 하자. 그러면 t의 증분 Δt가 충분히 작을 때 l의 증분 Δl은 선분 PQ의 길이와 거의 같다.

피타고라스의 정리에 의하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta l \fallingdotseq \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

그러므로 다음을 얻는다.

$$\frac{dl}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

따라서 곡선 $x=f(t),\ y=g(t)\ \ (a\le t\le b)$의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

한편 함수 $y=f(x)\ \ (a\le x\le b)$인 매개변수 t를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

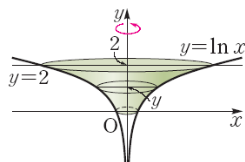
$$x=t,\ y=f(t)\ \ (a\le t\le b)$$

그러므로 곡선 $y=f(x)\ \ (a\le x\le b)$의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$$

$$=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx. \qquad \blacksquare$$

예제 137. 곡선 $y=\ln x$, x축, y축, 직선 $y=2$로 둘러싸인 도형을 y축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하여라.



풀이 $y=\ln x$에서

$$x=e^y \quad (0\le y\le 2)$$

이므로 구하는 부피 V는

$$V=\pi\int_0^2 (e^y)^2 dy=\pi\int_0^2 e^{2y}dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^2=\frac{\pi}{2}(e^4-1) \quad \square$$

예제 138. 정적분을 이용하여 반지름이 r인 원의 둘레의 길이를 구하여라.

풀이 $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ 이라고 하면 $-r\le x\le r$일 때 $f(x)$의 그래프는 반지름이 r인 반원이 된다. 이때

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

이므로 이 반원의 호의 길이는

$$\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

이고 위 식을 변형하면

$$(\text{준식})=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=r\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$$

이다. $x=r\cos\theta$로 치환하면 (단, $-\pi\le\theta\le 0$)

$$\frac{dx}{d\theta}=-r\sin\theta$$

이므로 $dx=-r\sin\theta$ 이고

$$x=-r \iff \theta=-\pi$$
$$x=r \iff \theta=\pi$$

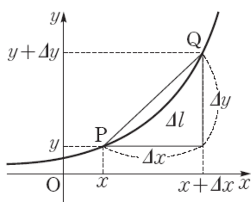
이므로 위 적분은 다음과 같이 계산된다.

$$r\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=r\int_{-\pi}^{0}\frac{-r\sin\theta}{\sqrt{r^2-r^2\cos\theta}}d\theta$$
$$=r\int_{-\pi}^{0}\frac{-r\sin\theta}{r|\sin\theta|}d\theta=-r\int_{-\pi}^{0}(-1)d\theta=r\pi.$$

이것은 반지름이 r인 반원의 호의 길이이므로, 반지름이 r인 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$이다. $\square$

> **회전체의 옆면의 넓이**
> 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$를 x축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 옆면의 넓이 S는
> $$S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

증명 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$를 x축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 겉넓이 S를 구해보자.



앞의 그림과 같이 매개변수가 t부터 $t+\Delta t$까지 변할 때

$$\Delta l \fallingdotseq \overline{PQ}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$
$$\fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+\{f'(x)\Delta x\}^2}=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,\Delta x$$

이므로 $\overline{PQ}$를 x축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 면의 넓이의 근삿값은

$$2\pi|f(x)|\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,\Delta x$$

이다. 따라서 구하는 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx \quad \blacksquare$$

예제 139. 정적분을 이용하여 반지름이 r인 구의 겉넓이를 구하여라.

풀이 $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ 이라고 하면 $-r\le x\le r$일 때 $f(x)$의 그래프는 반지름이 r인 반원이 된다. 이 반원을 x축을 축으로 하여 회전시키면 반지름이 r인 구가 된다. 이때

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

이므로 이 구의 겉넓이는

$$2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}r\,dx=4\pi r^2. \quad \square$$

> **위치, 속도, 가속도**
> 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $p(t)$, 속도가 $v(t)$, 가속도가 $a(t)$이고, 시각 $t=t_0$에서의 점 P의 위치가 x_0, 속도가 v_0일 때 다음이 성립한다.
> ① $\dfrac{d}{dt}p(t)=v(t)$, $\dfrac{d}{dt}v(t)=a(t)$
> ② $p(t)=x_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t}v(t)dt$, $v(t)=v_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t}a(t)dt$
> 또한 시각 $t=t_0$에서 $t=t_1$까지 점 P가 움직인 거리 s는
> ③ $s=\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}|v(t)|dt$
> 이다.

예제 140. 좌표가 4인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=t^2-2t$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 t에서 점 P의 위치
(2) 시각 $t=0$부터 시각 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량
(3) 시각 $t=0$부터 시각 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리

풀이 (1) 시각 $t=0$에서 위치가 $x=4$이므로, 구하는 위치 x는

$$x=4+\int_0^t(t^2-2t)dt=4+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3-t^2+4$$

(2) $\displaystyle\int_0^3(t^2-2t)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_0^3=0$

(3) $v(t)=t^2-2t=t(t-2)$이므로 구간 $[0,\ 2]$에서 $v(t) \le 0$이고 구간 $[2,\ 3]$에서 $v(t) \ge 0$이다. 따라서 점 P가 처음 3초 동안 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^3 |t^2-2t|dt=\int_0^2 (-t^2+2t)dt+\int_2^3 (t^2-2t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3=\frac{8}{3}.$$ □

예제 141. 지상 30 m의 높이에서 49 m/초의 속도로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 t초 뒤의 속도가 $v(t)=49-9.8t$(m/초)일 때, 다음을 구하여라.

(1) 발사하고 3초 뒤 물체의 지면으로부터의 높이

(2) 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리

풀이 (1) $t=0$일 때의 높이가 $x_0=30$이므로, t초 뒤 물체의 지면으로부터의 높이 x는

$$x=30+\int_0^t (49-9.8t)dt=30+49t-4.9t^2$$

따라서 $t=3$일 때 물체의 지면으로부터의 높이는

$$x=30+49\cdot 3-4.9\cdot 3^2=132.9(\mathrm{m})$$

(2) 최고점에서의 속도는 0 m/초이므로, $v(t)=49-9.8t=0$에서 $t=5$이다. 따라서 최고점의 높이는

$$x=30+49\cdot 5-4.9\cdot 5^2=152.5(\mathrm{m})$$

이고, 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$$152.5\times 2-30=275(\mathrm{m})$$

이다. □

사람들이 흔히 하는 말처럼 삶은 별게 아니었다. 훌륭한 드립커피나 적절한 순간에 흘러나오는 펫 숍 보이스의 노래, 닥터 하우스의 귀여운 미소, 좋은 책의 한 구절 같은 것들이면 충분할 때가 많았다. 먹고살기 위해 키보드에 손을 올리기 힘들어질 때까지 아르바이트 원고를 쓰지 않아도 된다면, 그리고 가끔씩 손톱 밑에 가시처럼 박히는 외로움만 어쩔 수 있다면 참 좋겠지. 하지만 그런 삶이 가능한 곳은 지상에는 없을 것이었다.

— 윤이형의 '큰 늑대 파랑' 중에서

평면도형과 공간도형

Sooji Shin • soojishin@live.com

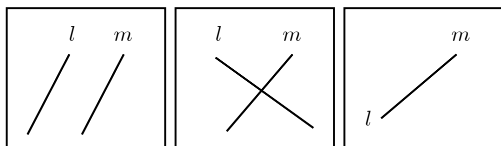
이 노트에서는 고등학교에서 배우는 수학의 내용 중 도형과 기하에 관련된 개념과 공식을 정리하고 그에 따른 예제와 풀이를 소개합니다. 필요한 경우 중학교 과정의 내용도 포함하고 있습니다. 이 노트에서 포함하고 있는 내용은 다음과 같습니다.

- 평면도형의 성질
- 평면좌표와 도형의 방정식
- 이차곡선
- 부등식의 영역
- 평면벡터
- 공간도형의 성질
- 공간좌표와 도형의 방정식
- 공간벡터
- 복소평면

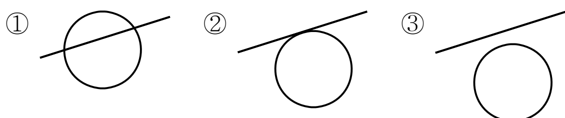
이 노트가 수학을 공부하는 분들께 도움이 되기를 바랍니다.

1 평면도형

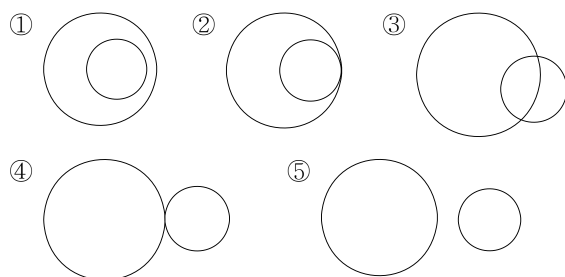
평면에서 두 직선의 위치관계는 다음과 같이 3가지가 있다.



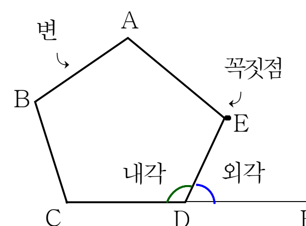
원과 직선의 위치관계는 다음과 같이 3가지가 있다. 원의 중심과 직선의 거리를 반지름과 비교하여 구할 수 있다.



반지름의 길이가 서로 다른 두 원의 위치관계는 다음과 같이 5가지가 있다. 두 원의 중심사이의 거리와 반지름의 길이를 이용하여 구할 수 있다.



다각형의 안쪽에 있는 각을 **내각**이라고 부른다. 한 내각의 꼭짓점에서 한 변과 그 변에 이웃한 변의 연장선이 이루는 각을 그 내각에 대한 **외각**이라고 부른다.



즉 (내각)+(외각)$=180^\circ$ 이다. 꼭짓점이 n개인 다각형의 모든 내각의 크기의 합은 $(n-2)\times 180^\circ$ 이다. 꼭짓점이 n개인 볼록다각형에서 그을 수 있는 대각선의 개수는 $\dfrac{n(n-3)}{2}$ 이다.

부채꼴의 중심각과 호의 관계는 다음과 같다.

- 부채꼴에서 반지름이 아닌 부분을 **호**라고 부른다.
- 한 원에서 같은 크기의 중심각에 대한 호의 길이는 같다.
- 한 원에서 호의 길이와 중심각의 크기는 서로 정비례한다.

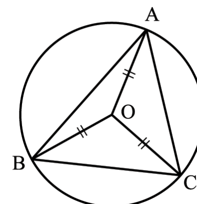
원과 부채꼴의 성질은 다음과 같다.

- 반지름이 r인 원의 넓이는 πr^2, 둘레의 길이는 $2\pi r$이다.
- 반지름이 r이고 중심각의 크기가 θ° 인 부채꼴에서 호의 길이는 $2\pi r\times\dfrac{\theta}{360}$ 이고 넓이는 $\pi r^2\times\dfrac{\theta}{360}$ 이다.

세 변을 가진 다각형을 **삼각형**이라고 부른다. 삼각형의 합동 조건에는 다음과 같은 것들이 있다.

- SSS 합동 : 대응되는 세 변의 길이가 각각 같다.
- SAS 합동 : 대응되는 두 변의 길이가 각각 같고 그 끼인각의 크기가 같다.
- ASA 합동 : 대응되는 한 변의 길이가 같고 그 양 끝각의 크기가 각각 같다.
- RHA 합동 : 두 직각삼각형에서 빗변의 길이가 같고 직각이 아닌 다른 각의 크기가 같다.

두 변의 길이가 같은 삼각형을 **이등변삼각형**이라고 부른다. 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같으며, 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다. 또한 두 내각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이 된다.



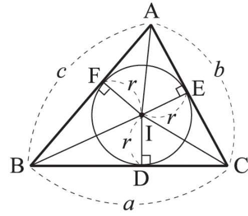
삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만나는데, 이 점을 **외심**이라고 부른다. 외심은 세 꼭짓점으로부터 거리가 같기 때문에 외접원의 중심이 된다.

예각삼각형의 외심은 삼각형 내부에 있고, 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이며, 둔각삼각형의 외심은 삼각형 외부에 있다.

참고로 점 O가 삼각형 $\triangle ABC$의 외심일 때 다음이 성립한다.

- $\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = 90^\circ$
- $\angle BOC = 2\angle BAC$
- $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

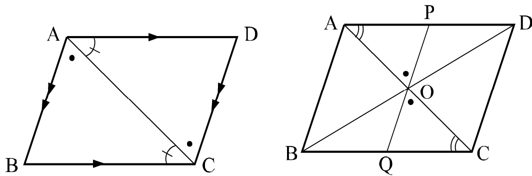
삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점은 한 점에서 만나는데, 이 점을 **내심**이라고 부른다. 내심은 세 변으로부터 거리가 같기 때문에 내접원의 중심이 된다. 외심과는 달리 내심은 항상 삼각형의 내부에 있다.



점 I가 삼각형 $\triangle ABC$의 내심이고, 내접원의 반지름이 r일 때 다음이 성립한다.

- $\angle IAB + \angle IBC + \angle ICA = 90^\circ$
- $\angle BIC = \frac{1}{2}\angle A + 90^\circ$
- $\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c)$

두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형을 **평행사변형**이라고 부른다.



사각형이 평행사변형이 될 필요충분조건은 각각 다음과 같다.

- 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.
- 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
- 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
- 두 대각선이 서로 이등분한다.
- 한 쌍의 대변이 평행하고 길이가 같다.

여러 가지 사각형의 정의는 다음과 같다.

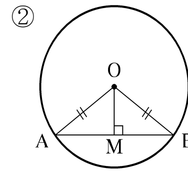
- **마름모** : 네 변의 길이가 모두 같은 사각형
- **직사각형** : 네 각의 크기가 모두 같은 사각형
- **정사각형** : 마름모이면서 직사각형인 사각형
- **사다리꼴** : 한 쌍의 대변이 서로 평행한 사각형
- **등변사다리꼴** : 한 밑변의 양 끝각이 서로 같은 사다리꼴

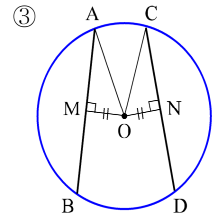
한 점으로부터 거리가 일정한 점들의 모임을 **원**이라고 부른다. 직선이 원과 두 점 A, B에서 만날 때, $\overline{AB}$를 **현**, $\overleftrightarrow{AB}$를 **할선**이라고 부른다.

현의 성질은 다음과 같다.

① 한 원에서 크기가 같은 두 중심각에 대한 현의 길이는 같다. 역으로 한 원에서 길이가 같은 두 현에 대한 중심각의 크기는 같다.

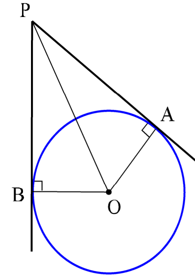
② 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직이등분한다. 역으로 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지난다. 즉 아래 그림에서 $\overline{OM} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{BM}$이다.

②


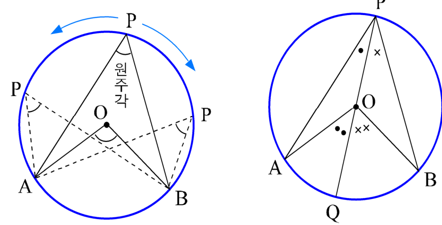
③


③ 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 서로 같다. 역으로 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다. 즉 위 그림에서 $\overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{OM} = \overline{ON}$이다.

원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

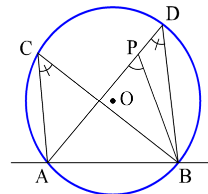


원 O에서 호 AB를 제외한 부분 위의 한 점 P에 대하여 $\angle APB$를 호 AB에 대한 **원주각**이라고 부른다.



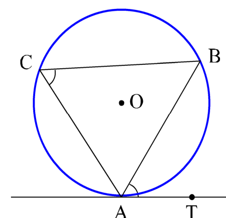
원 위에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 반이다. 또한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 일정하다.

아래 그림과 같이 선분 AB에 대하여 같은 쪽에 있는 두 점 C, D가 $\angle ACB = \angle ADB$를 만족시키면, 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

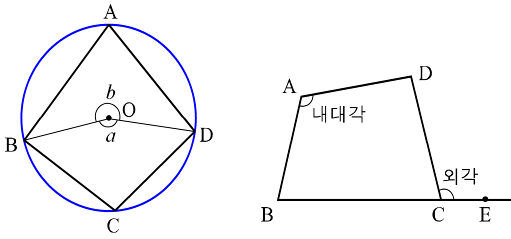


이 명제의 역도 참이다. 즉 A, B, C, D는 한 원 위에 있으면 원주각의 성질에 의하여 $\angle ACB = \angle ADB$이다.

아래 그림과 같이 원의 접선과 그 접점에서 그은 한 현이 이루는 각의 크기는 이 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉 $\angle BAT = \angle ACB$이다.

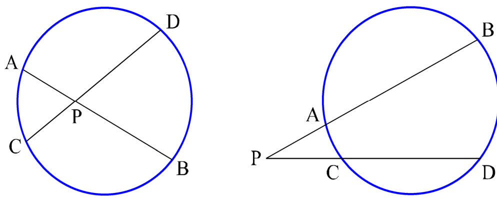


아래 그림과 같이 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 이다.

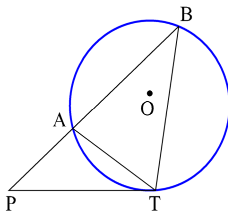


또한 원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그 내대각(마주보는 내각)의 크기와 같다. 이것은 역이 성립한다. 즉 마주보는 각의 크기의 합이 180° 인 사각형은 적당한 원에 내접한다.

아래 그림과 같이 한 원의 두 현 AB, CD 또는 그 연장선의 교점을 P라고 하면 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$가 성립한다.



원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 할선과 접선이 원과 만나는 점을 각각 A, B, T라고 하면 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PT}^2$이 성립한다.



2 도형의 닮음

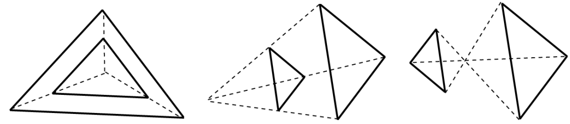
한 도형을 확대하거나 축소하여 다른 도형과 완전히 동일하게 만들 수 있을 때 두 도형은 서로 **닮음**이라고 말한다. 특히 두 삼각형 ABC와 DEF가 서로 닮음일 때, 대응되는 꼭짓점의 순서를 맞추어 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$로 나타낸다.

삼각형의 닮음 조건은 다음과 같은 것들이 있다.

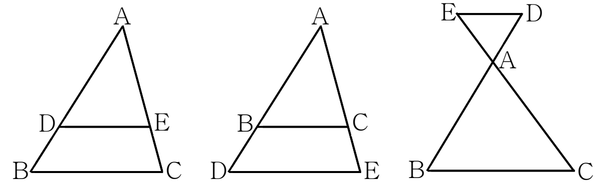
- SSS 닮음 : 세 변의 길이의 비가 일정하다
- SAS 닮음 : 두 변의 길이의 비가 같고 끼인각의 크기가 같다
- AA 닮음 : 두 각의 크기가 각각 같다

두 도형이 닮음일 때, 길이의 비를 **닮음비**라고 부른다. 두 평면도형의 닮음비가 $a:b$이면 넓이의 비는 $a^2:b^2$이다. 두 입체도형의 닮음비가 $a:b$이면 부피의 비는 $a^3:b^3$이다.

닮음인 두 도형에서 대응되는 점을 이은 선의 연장선이 한 점에서 만나면 두 도형은 **닮음의 위치에 있다**고 말하며, 만나는 점을 **닮음의 중심**이라고 부른다.



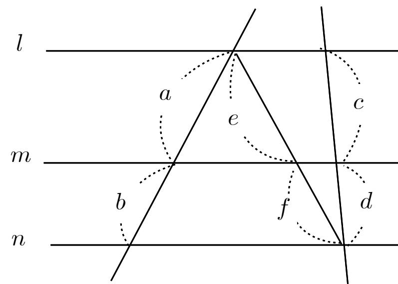
아래 그림처럼 $\triangle ABC$에서 변 AB, AC 또는 그 연장선 위에 각각 점 D, E가 있다고 하자.



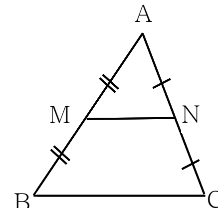
이때 다음이 성립한다.

- $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 필요충분조건은 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$이다.
- $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$일 필요충분조건은 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$이다.

아래 그림에서 $l /\!/ m /\!/ n$일 때 $a:b=c:d$가 성립한다.



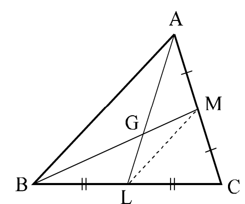
아래 그림에서 M과 N은 각각 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 중점이다.



이때 다음이 성립한다.

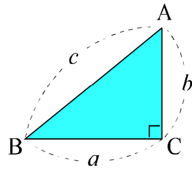
- 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분은 나머지 변과 평행하고, 그 길이는 나머지 변의 길이의 반이다.
- 삼각형의 한 변의 중점을 지나서 다른 한 변에 평행한 직선은 나머지 한 변의 중점을 지난다.

삼각형에서 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 연결한 성분을 **중선**이라고 부른다. 삼각형의 세 중선은 한 점에서 만난다. 이 점을 삼각형의 **무게중심**이라고 부른다. 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 2 : 1로 나눈다.



삼각형 ABC에서 각 C가 직각이면 $a^2+b^2=c^2$이 성립한다. 이와 같은 성질을 **피타고라스의 정리**라고 부른다.

삼각형 $\triangle ABC$의 세 변의 길이가 a, b, c이고 가장 긴 변이 c일 때 다음이 성립한다.

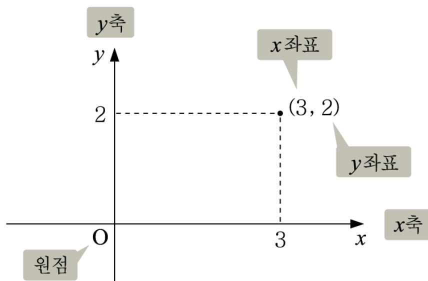


- $a^2+b^2>c^2$이면 $\triangle ABC$는 예각삼각형이다.
- $a^2+b^2=c^2$이면 $\triangle ABC$는 $\angle C$가 직각인 직각삼각형이다.
- $a^2+b^2<c^2$이면 $\triangle ABC$는 $\angle C$가 둔각인 삼각형이다.

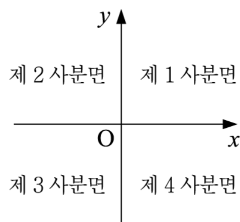
가로의 길이가 a이고 세로의 길이가 b인 직사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2}$이다. 세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선(맞모금)의 길이는 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$이다.

3 평면좌표

두 수 a, b를 쌍으로 나타낸 (a, b)를 **순서쌍**이라고 부른다. 이 순서쌍은 x좌표가 a이고 y좌표가 b인 점을 나타낸다.



좌표평면의 가로축을 **x축**, 세로축을 **y축**이라고 부른다.



사분면	위치	좌표
제 1 사분면	오른쪽 위	(양수, 양수)
제 2 사분면	왼쪽 위	(음수, 양수)
제 3 사분면	왼쪽 아래	(음수, 음수)
제 4 사분면	오른쪽 아래	(양수, 음수)

좌표평면에서 두 점 사이의 거리

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

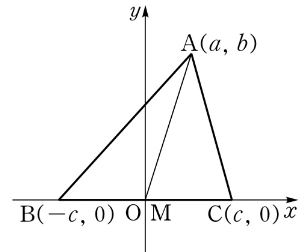
예제 1. 두 점 $A(1, -1)$, $B(4, 2)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 Q의 좌표를 구하여라.

해설 점 Q가 y축 위에 있으므로 Q의 좌표를 $Q(0, b)$라고 둔다. [여기서 b는 다른 문자로 대신할 수 있다.] 다음으로 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$가 되도록 식을 세운다. 그리고 만든 식을 풀어 b의 값을 구한다. □

예제 2. 삼각형 $\triangle ABC$에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때, 등식 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이 성립함을 증명하여라.

풀이 증명 문제는 항상 같은 방법으로 풀리는 것은 아니지만 보통 다음과 같은 방법을 많이 사용한다.

먼저 적절한 점을 잡아 원점으로 정하고, 적절히 방향을 잡아 x축과 y축을 정한다. [원점과 축을 어떻게 정하는지에 따라서 풀이 과정이 쉬워질 수도 있고 어려워질 수도 있다. 보통 다른 선분과 많이 연결된 점을 원점으로 잡으면 좋다.]



다음으로 각 점에 좌표를 정해준다. 좌표를 정할 때 아는 좌표는 수를 넣고, 모르는 좌표는 문자를 넣는다. 여기서는 세 꼭짓점의 좌표를 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$, $M(0, 0)$으로 정했다.

끝으로 등식의 좌변과 우변을 각각 계산하여 비교한다. 이 문제의 경우 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$와 $2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$가 $2(a^2+b^2+c^2)$으로 동일한 값이 나온다. □

예제 3. 세 점 $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(-3, 2)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표를 구하여라. [삼각형의 외심]

해설 먼저 구하려는 점의 좌표를 $P(x, y)$라고 둔다. 다음으로 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$를 식으로 나타내고, 연립방정식으로 나타낸다. [각 변을 제곱하면 제곱근 기호가 없어지므로 편리하다.] 끝으로 주어진 연립방정식을 풀어 x, y를 구한다. □

예제 4. 두 점 $A(-1, 1)$, $B(2, -1)$에서 같은 거리에 있는 점들이 나타내는 도형을 방정식으로 나타내어라.

해설 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 모임은 직선이 된다. 즉 주어진 문제는 $\overline{AB}$의 수직이등분선 방정식을 구하라는 문제이다.

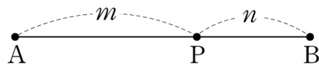
방법 1 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점을 $P(x, y)$라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$가 된다. 이 식을 변형하여 $y=ax+b$ 또는 $ax+by+c=0$ 꼴의 식을 구한다.

방법 2 $\overline{AB}$의 중점 M을 구한다. 그런 후 M을 지나고 $\overline{AB}$에 수직인 직선의 방정식을 구한다. □

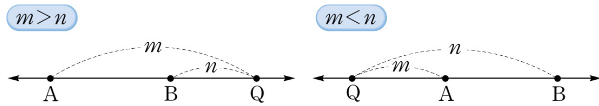
서로 다른 두 점 A, B가 있다고 하자. 그리고 m, n이 양수라고 하자. 이때 직선 AB 위의 점 P 중에서

$$\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$$

이 되는 점 P는 두 개가 있다. 두 개의 점 중에서 $\overline{AB}$ 위에 있는 것을 **내분점**, $\overline{AB}$ 바깥에 있는 것을 **외분점**이라고 부른다. [단, $m=n$이면 외분점은 존재하지 않는다.]



선분의 외분점은 $m>n$인 경우와 $m<n$인 경우 다른 방향에 놓이게 된다.



좌표평면에서 내분점과 외분점

m과 n이 양수라고 하자. 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right).$$

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는 ($m \neq n$일 때)

$$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right).$$

예제 5. 세 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하여라.

해설 이전에 배웠던 도형의 성질을 최대한 활용하여 식을 세운다. 이 문제에서는 구해야 하는 것이 무게중심이므로 중학교에서 배운 무게중심의 성질을 활용하면 된다.

먼저 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 M이라고 하자. 그러면 무게중심의 성질에 의하여 점 G는 $\overline{\mathrm{AM}}$을 $2:1$로 내분하는 점이 된다. 다음으로 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점 M의 좌표를 구한 뒤 다시 $\overline{\mathrm{AM}}$을 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 구하면 된다. □

예제 6. 세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(2, 1)$, $\mathrm{B}(3, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB가 있다. $\mathrm{P}(4, 0)$을 지나고 변 AB에 평행한 직선이 $\overline{\mathrm{OA}}$의 연장선과 만나는 점 Q의 좌표를 구하여라.

해설 그림을 그린 뒤 삼각형의 성질, 닮음의 성질 등을 이용하여 식을 세운다. 이 문제에서는 $\triangle\mathrm{AOB} \backsim \triangle\mathrm{QOP}$이다. 그런데 점 P는 $\overline{\mathrm{OB}}$를 $4:1$로 외분하는 점이므로 점 Q도 $\overline{\mathrm{OA}}$를 $4:1$로 외분하는 점이다.

다른 방법 $\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기는 -1이므로 $\overline{\mathrm{QP}}$는 $\mathrm{P}(4, 0)$을 지나고 기울기가 -1인 직선, 즉 $y=-x+4$이다. 한편 $\overline{\mathrm{OA}}$의 연장선은 직선 $y=\frac{1}{2}x$이다. 이 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면 Q의 좌표가 나온다. □

예제 7. 네 점 $\mathrm{A}(-1, 5)$, $\mathrm{B}(2, a)$, $\mathrm{C}(3, 1)$, $\mathrm{D}(b, 2)$에 대하여 □ABCD가 평행사변형일 때, a, b의 값을 각각 구하여라.

해설 앞에서와 마찬가지로 평행사변형의 성질을 이용한다. 중학교에서 사각형이 평행사변형이 될 필요충분조건 5개를 배웠다. 이 문제는 그 중에서 '두 대각선이 서로 이등분한다'를 이용하면 된다. 즉 ($\overline{\mathrm{AC}}$의 중점)$=$($\overline{\mathrm{BD}}$의 중점)을 이용하여 식을 세우고 x, y를 구한다. □

4 직선의 방정식

미지수가 2개인 방정식의 해를 좌표평면에 도형으로 나타낼 수 있을 때, 그 방정식을 **도형의 방정식**이라고 부른다. 예를 들어 집합 $\{(x, y) \mid 2x-y+1=0\}$은 직선이고 $2x-y+1=0$은 직선의 방정식이다. 즉 집합

$$F=\{(x, y) \mid f(x, y)=0\}$$

은 도형이고, 이 집합의 조건인 $f(x, y)=0$은 도형의 방정식이다. 집합이 어떤 도형이 되는지에 따라 도형의 방정식의 이름이 달라진다. F가 직선이면 $f(x, y)=0$은 직선의 방정식이 되고, F가 원이면 $f(x, y)=0$은 원의 방정식이 된다.

기울기가 주어진 직선의 방정식

점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1).$$

특히 기울기가 m이고 y절편이 n인 직선의 방정식은

$$y=mx+n.$$

두 점을 지나는 직선의 방정식

두 점 (x_1, y_1)과 (x_2, y_2)를 모두 지나는 직선의 방정식은

- $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ ($x_1 \neq x_2$일 때)
- $x=x_1$ ($x_1=x_2$일 때)

예제 8. $a \neq 0$, $b \neq 0$일 때, x절편이 a이고 y절편이 b인 직선의 방정식이 다음과 같음을 보여라.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

해설 직선의 방정식을 구할 때에는 지나는 점의 좌표와 기울기를 구해야 한다.

먼저 x절편이 a이고 y절편이 b인 직선의 기울기는 $-\frac{b}{a}$이다. 또한 y절편이 b이므로 $(0, b)$를 지난다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-\frac{b}{a}x+b$가 된다. 이 식을 변형하면 문제에서 주어진 직선의 방정식을 얻는다. □

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

두 직선 $ax+by+c=0$과 $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0.$$

여기서 k는 상수이고, k의 값에 따라 기울기가 달라진다.

참고 두 도형 $f(x, y)=0$과 $g(x, y)=0$의 교점을 지나는 도형의 방정식은 $f(x, y)+kg(x, y)=0$이 된다. □

예제 9. 직선 $x+y-2+k(2x-y-1)=0$은 k의 값에 상관없이 점 P를 지난다. 이때 P의 좌표를 구하여라.

해설 두 직선 $x+y-2=0$과 $2x-y-1=0$의 교점을 구한다.

예제 10. 일차방정식 $(2k+1)x+(k-2)y+(2-k)=0$이 나타내는 직선은 실수 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 그 점의 좌표를 구하여라.

해설 수학 문제를 풀 때 '~에 관계없이'라는 말이 나오면, 그 문자로 묶어내어 푸는 경우가 많다.

이 문제에서는 'k의 값에 관계없이'라고 하였으므로 주어진 식을 k로 묶는다. 그러면 $(x-2y+2)+k(2x+y-1)=0$이 된다. 따라서 두 직선 $x-2y+2=0$과 $2x+y-1=0$의 교점을 구하면 된다. □

두 직선의 위치관계는 '한 점에서 교차하는 경우', '평행하고 만나지 않는 경우', '일치하는 경우'로 나눌 수 있다. 특히 한 점에서 교차하는 경우는 직교하는 경우(즉, 서로 수직인 경우)와 직교하지 않는 경우로 나눌 수 있다.

두 직선의 위치관계

두 직선 $y=mx+n$과 $y=m'x+n'$에 대하여

- 두 직선이 평행할 필요충분조건 : $m=m'$, $n\neq n'$.
- 두 직선이 수직일 필요충분조건 : $mm'=-1$.

직선의 방정식이 항상 $y=mx+n$의 꼴로 예쁘게 주어지는 것은 아니다. 상황에 따라서는 $ax+by+c=0$의 꼴로 주어지는 경우도 많다. 이때 $y=mx+n$를 **직선의 방정식의 표준형**이라고 하고 $ax+by+c=0$을 **직선의 방정식의 일반형**이라고 한다.

예제 11. 두 직선 $ax+by+c=0$과 $a'x+b'y+c'=0$이 서로 평행할 조건과 수직일 조건이 각각

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'},\quad aa'+bb'=0$$

임을 증명하여라. (단, 계수와 상수는 각각 0이 아니다.)

풀이 직선의 방정식이 일반형으로 주어졌을 때, 두 직선의 위치관계를 구하려면 방정식을 표준형으로 변형하여 비교한다.

두 직선을 표준형으로 바꾸면

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b},\quad y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'} \quad \cdots (*)$$

이다. 따라서 평행할 조건은

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},\quad \frac{c}{b}\neq\frac{c'}{b'}$$

이고 이것을 변형하면

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

을 얻는다. 한편 (*)에서 두 식을 비교하면 수직일 조건은

$$\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1$$

이고 이것을 변형하면

$$aa'+bb'=0$$

을 얻는다. □

예제 12. 두 점 $A(-1, -2)$, $B(3, 2)$를 지나는 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구하여라.

풀이 지나는 점과 기울기를 구한다.

수직이등분선이므로 $\overline{AB}$의 중점 $(1, 0)$을 지난다. 또한 $\overline{AB}$의 기울기가 1이므로 수직이등분선의 기울기는 -1이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-0=-1(x-1)$이다. □

두 도형의 거리는 두 도형을 잇는 선 중 가장 짧은 선의 길이이다. 점과 직선 사이의 거리는 점에서 직선에 내린 수선의 길이와 같다.

점과 직선 사이의 거리

점 $P(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

증명 직선 $ax+by+c=0$을 l이라고 하자.

점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $H(x_2, y_2)$라 하면 점 P와 직선 l 사이의 거리는

$$\overline{PH}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad \cdots ①$$

이다. 이 값을 다음의 세 가지 경우로 나누어 구한다.

(i) $a\neq 0$, $b\neq 0$일 때, 직선 l의 기울기는 $-\frac{a}{b}$, 직선 PH의 기울기는 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\left(-\frac{a}{b}\right)=-1,\ 즉\ \frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}$$

이고, $\frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}=t$ 로 놓으면

$$x_2=x_1+at,\ y_2=y_1+bt \quad \cdots ②$$

이다. 한편, 점 $H(x_2, y_2)$는 직선 l 위에 있으므로

$$ax_2+by_2+c=0$$

이다. 여기에 ②를 대입하면 $a(x_1+at)+b(y_1+bt)+c=0$이므로

$$t=-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$$

이다. ②에서 $x_2-x_1=at$, $y_2-y_1=bt$이므로 이것을 ①에 대입하면

$$\overline{PH}=\sqrt{(at)^2+(bt)^2}=|t|\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이다.

(ii) $a=0$, $b\neq 0$일 때, 직선 l의 방정식은 $y=-\frac{c}{b}$이므로

$$\overline{PH}=\left|y_1-\left(-\frac{c}{b}\right)\right|=\left|\frac{by_1+c}{b}\right| \quad \cdots ③$$

이다. 그런데 ③은 ②에 $a=0$을 대입한 결과와 같다.

(iii) $a\neq 0$, $b=0$일 때, (ii)와 마찬가지로 성립한다. ■

예제 13. 두 직선 $4x+3y-4=0$과 $4x+3y+6=0$의 거리를 구하여라.

해설 평행한 두 직선 사이의 거리를 구할 때에는 한 직선 위의 점을 잡고, 그 점과 다른 직선의 거리를 구한다. □

예제 14. 점 $(1, 2)$를 지나고, 원점에서 거리가 2인 직선의 방정식을 구하여라.

해설 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라고 두고 m과 n을 구한다. 단, y축에 평행한 직선을 구하려면 $x=c$라고 두고 c를 구해야 한다.

직선의 방정식을 $y=mx+n$이라고 하자. 직선이 $(1, 2)$를 지나므로 $y-2=m(x-1)$이다. 이것을 변형하면

$$mx-y+2-m=0$$

이다. 이 직선과 원점과의 거리는

$$\frac{|2-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

이므로 이것을 풀면 m을 구할 수 있다. □

예제 15. 기울기가 -2이고, 원점에서 거리가 $\sqrt{5}$인 직선의 방정식을 모두 구하여라.

해설 기울기가 -2이므로, 직선의 방정식을 $y=-2x+n$이라고 두고 n을 구한다. □

5 원의 방정식

한 점으로부터 거리가 일정한 점들의 모임은 원이 된다. 중심이 $\mathrm{C}(a, b)$이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$이다. 양변을 제곱하여 다음과 같은 원의 방정식을 얻는다.

> **원의 방정식**
> 중심이 $\mathrm{C}(a, b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
> $$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

예제 16. 두 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$과 $\mathrm{B}(0, 2)$를 지나는 원 중에서 가장 작은 것(반지름이 가장 짧은 것)의 방정식을 구하여라.

해설 원의 방정식을 구할 때에는 원의 중심의 위치와 반지름의 길이를 알아야 한다. 두 점 A와 B를 지나는 원 중에서 가장 작은 것은 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이 원의 중심이 되고 $\overline{\mathrm{AB}}$이 길이의 반이 원의 반지름이 된다. □

예제 17. 방정식 $x^2+y^2-2x-6y+6=0$이 어떤 도형을 나타내는지 구하여라.

해설 주어진 식을 변형하면 $(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$이 된다. 따라서 주어진 방정식은 중심이 $(1, 3)$이고 반지름이 2인 원이 된다. □

참고 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$의 꼴을 **원의 방정식의 일반형**이라고 부르고 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 꼴을 **원의 방정식의 표준형**이라고 부른다. 일반형으로 주어진 원의 방정식은 표준형으로 바꾸면 중심의 위치와 반지름을 구할 수 있다.

참고 미지수가 2개인 이차방정식이 원의 방정식이 되려면 다음 세 조건을 모두 만족시켜야 한다.

(i) x^2과 y^2의 계수가 같아야 한다.
(ii) xy 항이 없어야 한다.
(iii) 표준형으로 바꾸었을 때 반지름이 양의 실수가 되어야 한다.

예제 18. 방정식 $x^2+y^2+2x-y+k=0$이 원을 나타내도록 실수 k의 값의 범위를 정하여라.

풀이 주어진 방정식을 표준형으로 바꾸어 살펴본다. 주어진 방정식을 변형하면 $(x+1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}-k$이므로 $\frac{5}{4}-k>0$이 되어야 한다. □

예제 19. 세 점 $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$를 지나는 원의 방정식을 구하여라.

해설 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 두고 세 점의 좌표를 각각 대입하여 세 방정식을 만든다. 그리고 연립하여 A, B, C를 구한다. □

예제 20. 두 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$으로부터 거리의 비가 $1:2$인 점들이 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

풀이 구하려는 도형 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하자. $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$가 되어야 하므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2:\overline{\mathrm{BP}}^2=1:4$가 되어야 한다. 즉 $(x+2)^2+y^2:(x-1)^2+y^2=1:4$이다. 이것을 풀어 정리하면 $(x+3)^2+y^2=2^2$을 얻는다. [즉 주어진 도형은 중심이 $(-3, 0)$이고 반지름이 2인 원이다.] □

참고 두 점 A, B로부터 거리의 비가 $m:n$인 점들이 나타내는 도형은 원이 된다. 이 도형을 **아폴로니오스의 원**이라고 부른다. [단, 여기서 m과 n은 서로 다른 양수이다.]

아폴로니우스의 원을 쉽게 구하는 방법은 다음과 같다.

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$으로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 구한다.

도형의 위치관계는 보통 몇 개의 점에서 만나는지에 의해 결정된다. 두 도형의 방정식을 연립하여 만든 방정식의 근이 곧 만나는 점의 좌표가 되므로, 두 도형이 몇 개의 점에서 만나는지를 구하려면 연립하여 근의 개수를 구하면 된다.

원과 직선의 위치 관계

반지름이 r인 원 O와 직선 l이 있다. 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라고 하고, 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라고 하자. 이때 위치 관계는 다음과 같이 구할 수 있다.

위치 관계	판별식	원의 중심과 직선
두 점에서 만난다	$D>0$	$d<r$
한 점에서 만난다	$D=0$	$d=r$
만나지 않는다	$D<0$	$d>r$

예제 21. 원 $x^2+y^2=2$와 직선 $x+y=2$의 위치관계를 구하여라.

풀이 두 방정식을 연립하면 $x^2+(2-x)^2=2$이다. 이것을 변형하면 $x^2-2x+1=0$이다. 이 식의 판별식을 구하면 $D=0$이므로 주어진 원과 직선은 한 점에서 만난다. 즉 접한다.

다른 방법 주어진 원의 반지름을 구하면 $\sqrt{2}$이다. 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 사이의 거리를 구하면 $\sqrt{2}$가 나온다. 따라서 주어진 원과 직선은 접한다. □

예제 22. 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=2x+k$가 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

풀이 두 식을 연립하면 $x^2+(2x+k)^2=1$이고 이것을 변형하면 $5x^2+4kx+k^2-1=0$이다. 원과 직선이 만나지 않으려면 이 방정식이 실근을 갖지 않아야 한다. 즉 판별식이 음수가 되어야 한다. 즉 $D=16k^2-20(k^2-1)<0$이다.

이 부등식을 풀면 '$k<-\sqrt{5}$ 또는 $\sqrt{5}<k$'를 얻는다. □

원의 접선의 방정식 (기울기가 주어진 경우)

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구하려면, 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라고 두고 이 직선이 원에 접하도록 n의 값을 정해준다.

예제 23. 원 $x^2+y^2=8$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하여라.

해설 구하는 직선을 $y=3x+n$이라고 둔다. 그리고 주어진 원의 방정식과 연립하면 $x^2+(3x+n)^2=8$이 된다. 이 이차방정식의 판별식이 0이 되도록 n의 값을 정한다.

다른 방법 구하는 직선을 $y=3x+n$이라고 두고, 이 직선과 원점 사이의 거리가 원의 반지름 $\sqrt{8}$과 같아지도록 n의 값을 정한다. □

참고 교과서에는 원의 접선의 방정식을 구하는 공식이 나와 있다. 그러나 그 공식을 외우는 것보다, 접선의 방정식을 구하는 원리를 이해하는 것이 더 중요하다.

원의 접선의 방정식 (접점이 주어진 경우)

중심이 C인 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하려면, 점 P를 지나고 $\overline{\mathrm{CP}}$에 수직인 직선의 방정식을 구한다.

예제 24. 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $\mathrm{P}(3, 4)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기는 $\frac{4}{3}$이다. 따라서 접선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다. 접선은 $(3, 4)$를 지나고 $\overline{\mathrm{OP}}$에 수직이므로 접선의 방정식은 $y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$이다. □

원의 접선의 방정식 (지나는 점이 주어진 경우)

원 바깥의 점 (x_1, y_1)로부터 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에 그은 접선의 방정식을 구하려면 직선의 방정식을 $y-y_1=m(x-x_1)$이라고 두고, 이 직선과 원과 접하도록 m의 값을 정해준다.

예제 25. 점 $(2, 3)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 점 $(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은 $y-3=m(x-2)$이다. 이 직선과 원점 사이의 거리가 반지름과 같아야 하므로

$$\frac{|3-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=2$$

가 되어야 한다. 이 식을 풀면 $m=\frac{5}{12}$를 얻는다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-3=\frac{5}{12}(x-2)$이다. 한편 좌표평면에 그림을 그려보면 점 $(2, 3)$을 지나고 주어진 원 $x^2+y^2=4$에 접하는 직선은 y축과 평행한 직선 $x=2$도 있다. (이 풀이에서 y축에 평행한 직선을 잊으면 안 된다.)

다른 방법 참고로 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식 공식은 $xx_1+yy_1=r^2$이다. 이 공식을 이용하면 구할 수 있다.

① 접점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라고 하면 구하려는 직선의 방정식은 $xx_1+yy_1=4$이다. ② 이 직선이 $(2, 3)$을 지나므로

$$2x_1+3y_1=4 \quad \cdots (1)$$

이다. ③ 한편 (x_1, y_1)은 원 위의 점이므로

$${x_1}^2+{y_1}^2=4 \quad \cdots (2)$$

이다. ④ 다음으로 (1), (2)를 연립하여 풀면

$$x_1=2,\ y_1=0 \quad \text{또는} \quad x_1=-\frac{10}{13},\ y_1=\frac{24}{13}$$

을 얻는다. ⑤ 이것을 각각 $xx_1+yy_1=4$에 넣으면 구하는 직선의 방정식은 $x=2$와 $5x-12y+26=0$이 나온다. □

원과 원의 위치 관계

반지름이 각각 R, r인 두 원의 중심 사이의 거리를 d라고 하자. (단, $R>r$) 이때 두 원의 위치 관계는 다음과 같다.

위치 관계	d의 범위	공통접선의 개수
만나지 않고 밖에 있다	$d>R+r$	4
외접한다	$d=R+r$	3
두 점에서 만난다	$R-r<d<R+r$	2
내접한다	$d=R-r$	1
한 원이 다른 원을 품는다	$d<R-r$	0

예제 26. 두 원 $x^2+(y-4)^2=1$과 $(x-3)^2+y^2=9$의 공통외접선의 길이를 구하여라.

풀이 원의 중심 사이의 거리가 5이고, 반지름의 합이 $3+1$이므로 두 원은 서로 밖에 있으면서 만나지 않는다.

작은 원의 중심을 O, 외접선과의 접점을 P라고 하고, 큰 원의 중심을 O′, 접선과의 접점을 P′이라고 하자. 그러면 공통외접선의 길이는 $\overline{\mathrm{PP'}}$의 길이가 된다. 점 O에서 $\overline{\mathrm{O'P'}}$에 내린 수선의 발을 Q라고 하면 $\overline{\mathrm{PP'}}$의 길이는 $\overline{\mathrm{OQ}}$의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{OO'}}=5$, $\overline{\mathrm{O'Q}}=\overline{\mathrm{O'P'}}-\overline{\mathrm{P'Q}}=3-1=2$이므로 피타고라스의 정리를 이용하면 $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{21}$이다. [그림을 직접 그려보자.]

6 도형의 이동

앞서 설명한 것처럼 도형은 집합이고 도형의 방정식은 집합의 조건이다. 즉 집합

$$F=\{(x,\ y)\,|\,f(x,\ y)=0\}$$

은 도형이고, 이 집합의 조건인 $f(x,\ y)=0$은 도형의 방정식이다. 예를 들어 다음과 같은 원을 생각해보자.

$$C=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2=5^2\}$$

이때 조건 $x^2+y^2=5^2$은 $(3,\ 4)$를 대입하면 참이 된다. 원 C를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원을 C'이라고 하자. 이때 C'을 나타내는 도형의 방정식에는 점 $(3+1,\ 4+2)$를 대입했을 때 참이 되어야 한다. 그렇게 되게 하려면 도형의 방정식

$$x^2+y^2=5^2$$

에서 x를 $x-1$로, y를 $y-2$로 바꾸어

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$$

으로 만들어 주어야 $(3+1,\ 4+2)$를 대입했을 때 참이 되는 방정식이 된다. 요컨대 도형을 평행이동하면, 도형의 방정식에서는 평행이동한 만큼 각 좌표를 빼주어야 한다는 것이다.

평행이동한 도형의 방정식

도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 x를 $x-a$로 바꾸고 y를 $y-b$로 바꾸어 주면 된다.

예제 27. 원 $x^2+y^2+5x-2y-3=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원점이 중심인 원이 되었다. a, b의 값을 구하여라.

풀이 주어진 원의 방정식을 (표준형으로) 변형하면

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{41}{4}$$

이다. x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$$\left(x-a+\frac{5}{2}\right)^2+(y-b-1)^2=\frac{41}{4}$$

이다. 이 원의 중심이 원점이 되어야 하므로

$$a-\frac{5}{2}=0,\ b+1=0$$

이 되어야 한다. 즉 $a=\frac{5}{2}$, $b=-1$이다. □

대칭이동한 도형의 방정식

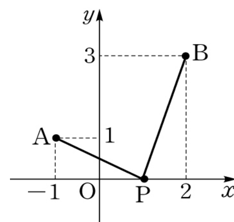
도형을 대칭이동한 도형의 방정식을 구하는 방법은 다음과 같다.

(1) x축에 대하여 대칭이동하면 y를 $-y$로 바꾼다.
(2) y축에 대하여 대칭이동하면 x를 $-x$로 바꾼다.
(3) 원점에 대하여 대칭이동하면 x를 $-x$로, y를 $-y$로 바꾼다.
(4) 대각선(직선 $y=x$)에 대하여 대칭이동하면 x와 y를 서로 바꾼다.

예제 28. 직선 $2x-y+4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 다음, x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $(2,\ 1)$을 지난다. 이때 b의 값을 구하여라.

해설 복잡해 보이는 문제일지라도 당황하지 말고 문제에서 제시한 순서대로 도형을 이동시킨 뒤 $(2,\ 1)$을 대입하여 등식이 성립하도록 b의 값을 정한다. □

예제 29. 아래 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$이 있고, 점 P는 x축 위의 점이다.



이때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하여라.

해설 한 점에서 출발하여 직선을 지나 점까지 도착하는 이르는 가장 짧은 경로의 길이는, 한 점을 직선에 대칭이동시켜 구한다.

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라고 하자. 그러면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$$

이다. 즉 P가 $\overline{\mathrm{A'B}}$ 위에 있을 때 주어진 길이가 최소가 된다. 따라서 $\overline{\mathrm{A'B}}$의 길이가 구하는 최솟값이다. □

7 일차변환

> 2009 개정 교육과정에서 일차변환은 고급수학 과정으로 올라갔으며 정규교육과정에서는 제외되었다.

좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 점 $\mathrm{P}'(x', y')$으로 대응시키는 함수를 좌표평면 위의 **변환**이라고 하며, 이것을 기호로

$$f : (x, y) \to (x', y')$$

과 같이 나타낸다. 이때 점 $\mathrm{P}(x, y)$는 변환 f에 의하여 점 $\mathrm{P}'(x', y')$으로 **옮겨진다**고 말한다.

일반적으로 좌표평면 위의 변환 $f : (x, y) \to (x', y')$에서

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d\text{는 상수}) \qquad \cdots ①$$

와 같이 x', y'이 상수항이 없는 x, y의 일차식으로 나타내어질 때, 이 변환 f를 **일차변환**이라고 부르며, ①을 일차변환 f를 나타내는 식이라고 부른다. ①을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이므로 $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$로 놓으면 다음과 같다.

$$X' = AX \qquad \cdots ②$$

따라서 일차변환 f를 나타내는 식 ①이 주어지면 ②와 같이 행렬 A가 결정되고, 역으로 행렬 A가 주어지면 ②에 의하여 ①과 같이 일차변환 f가 정해짐을 알 수 있다. 이때 행렬 A를 일차변환 f를 나타내는 행렬 또는 **일차변환 f의 행렬**이라고 부른다.

예제 30. 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환 f에 의하여 점 $\mathrm{P}(1, 1)$, $\mathrm{Q}(2, -3)$이 각각 옮겨지는 점 P', Q'의 좌표를 구하여라.

풀이 점 $\mathrm{P}(1, 1)$, $\mathrm{Q}(2, -3)$이 일차변환 f에 의하여 각각 $\mathrm{P}'(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}'(x_2, y_2)$로 옮겨진다고 하면

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이므로 구하는 점은 $\mathrm{P}'(1, 5)$, $\mathrm{Q}'(7, 0)$이다. □

예제 31. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1, -1)$, $\mathrm{B}(2, 1)$을 각각 두 점 $\mathrm{A}'(5, -9)$, $\mathrm{B}'(1, -3)$으로 옮기는 일차변환의 행렬을 구하여라.

풀이 구하는 일차변환을

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

로 두자. 주어진 점의 좌표를 대입하면

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2c+d \end{pmatrix}$$

이므로 이것을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$, $c=-4$, $d=5$이다. 따라서 구하는 행렬은 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$이다. □

예제 32. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 점 $\mathrm{P}'(x', y')$으로 옮기는 변환 $f : (x, y) \to (x', y')$에 대하여

$$x = 2x' - y', \; y = -3x' + 2y'$$

이 성립할 때, 일차변환 f를 나타내는 행렬을 구하여라.

풀이 두 식 $x = 2x' - y'$, $y = -3x' + 2y'$을 x', y'에 대하여 인립하여 풀면 $x' = 2x + y$, $y' = 3x + 2y$이다. 이 식을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 구하는 행렬은 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$이다. □

> **일차변환의 성질**
> 일차변환 f와 두 점 X_1, X_2, 그리고 상수 k에 대하여 다음이 성립한다.
> (1) $f(kX_1) = kf(X_1)$
> (2) $f(X_1 + X_2) = f(X_1) + f(X_2)$

예제 33. 일차변환 f의 행렬이 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$이고, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$일 때, $f(2X_1 + X_2)$를 구하여라.

풀이 $f(2X_1 + X_2) = 2f(X_1) + f(X_2) = 2AX_1 + AX_2$

$$= 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$ □

점이나 직선에 대하여 대칭이동시키는 변환을 **대칭변환**이라고 부른다.

> **대칭변환의 행렬**
> (1) x축에 대한 대칭변환 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
> (2) y축에 대한 대칭변환 : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
> (3) 직선 $y = x$에 대한 대칭변환 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
> (4) 원점에 대한 대칭변환 : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

예제 34. 점 $\mathrm{P}(2, 1)$이 x축에 대한 대칭변환에 의하여 옮겨진 점을 Q, y축에 대한 대칭변환에 의하여 옮겨진 점을 R라고 할 때, 선분 QR의 길이를 구하여라.

풀이 두 점의 좌표를 $\mathrm{Q}(a, b)$, $\mathrm{R}(c, d)$라고 하면

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

이므로 $\overline{\mathrm{QR}} = \sqrt{(2+2)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{5}$이다. □

좌표평면 위의 임의의 점 P(x, y)를

$$\begin{cases} x' = kx \\ y = ky \end{cases} \quad (k\text{는 0이 아닌 실수})$$

에 의하여 점 P$'(x', y')$으로 옮기는 일차변환을 원점 O를 닮음의 중심으로 하는 닮음비가 k인 **닮음변환**이라고 부른다. 별다른 언급 없이 닮음비가 k인 닮음변환이라고 하면 닮음의 중심이 원점인 것으로 생각한다.

닮음변환의 행렬

(1) 닮음비가 k인 닮음변환 : $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = kE$

(2) 항등변환 : 닮음비가 1인 닮은변환

예제 35. 원점을 중심으로 닮음비가 3인 닮음변환에 의하여 점 P$(3, -2)$가 옮겨지는 점의 좌표를 구하여라.

풀이 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 3인 닮음변환을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 구하는 점의 좌표는 $(9, -6)$이다. □

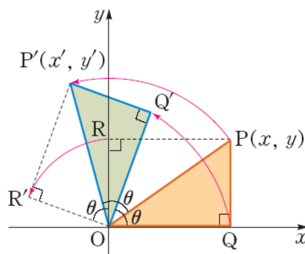
좌표평면 위의 점을 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전하여 옮기는 일차변환을 **회전변환**이라고 부른다.

회전변환의 행렬

원점을 중심으로 θ만큼 회전하는 회전변환의 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

증명 좌표평면 위의 점 P(x, y)를 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전한 점을 P$'(x', y')$라고 하자.



두 점 Q$(x, 0)$, R$(0, y)$를 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전한 점을 각각 Q$'$, R$'$이라고 하면

$$\text{Q}'(x\cos\theta, \ x\sin\theta)$$

$$\text{R}'\left(y\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right), \ y\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$

즉 R$'(-y\sin\theta, \ y\cos\theta)$이다.

이때 직사각형 OQ$'$P$'$R$'$에서 두 대각선 OP$'$, Q$'$R$'$의 중점이 일치하므로

$$\frac{x'}{2} = \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{2}, \quad \frac{y'}{2} = \frac{x\sin\theta + y\cos\theta}{2}$$

이다.

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

이것을 행렬을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ ■

예제 36. 원점을 중심으로 점 P$(2, -1)$을 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전한 점의 좌표를 구하여라.

풀이 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전한 일차변환의 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

이므로

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \ \frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$이다. □

두 일차변환

$$f : (x, y) \to (x', y'),$$
$$g : (x', y') \to (x'', y'')$$

에 의하여 점 (x, y)를 (x'', y'')으로 옮기는 변환을 f와 g의 **합성변환**이라고 하고 기호로

$$g \circ f : (x, y) \to (x'', y'')$$

으로 나타낸다.

합성변환의 행렬

일차변환 f의 행렬이 A이고 일차변환 g의 행렬이 B일 때, 일차변환 $g \circ f$의 행렬은 BA이다.

참고 세 일차변환 f, g, h에 대하여

(1) 일반적으로 $g \circ f \neq f \circ g$이다.

(2) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$이다.

예제 37. 두 일차변환 f와 g를 나타내는 행렬이 각각

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

일 때, 합성변환 $g \circ f$에 의하여 점 $(1, 1)$이 옮겨지는 점의 좌표를 구하여라.

풀이 합성변환 $g \circ f$를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

이고

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

이므로 구하는 점의 좌표는 $(-2, -2)$이다. □

예제 38. 원점에 대한 대칭변환을 f, 원점을 중심으로 45° 만큼 회전한 회전변환을 g라고 할 때, 합성변환 $g \circ f$에 의하여 점 P(2, 1)이 옮겨지는 점의 좌표를 구하여라.

풀이 원점에 의한 대칭변환 f를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

이다. 또한 원점을 중심으로 45° 만큼 회전한 회전변환 g를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos45^\circ & -\sin45^\circ \\ \sin45^\circ & \cos45^\circ \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로 구하는 점의 좌표를 $\mathrm{P}'(x', y')$이라고 하면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$이다. □

예제 39. 원점을 중심으로 75° 만큼 회전한 일차변환에 의하여 점 $\mathrm{P}(\sqrt{3}, 1)$이 옮겨진 점의 좌표를 (a, b)라 할 때, ab의 값을 구하여라.

풀이 원점을 중심으로 30° 만큼 회전한 일차변환을 f, 45° 만큼 회전한 일차변환을 g라고 하면 원점을 중심으로 75° 만큼 회전한 일차변환은 합성변환 $g \circ f$와 같다. 따라서

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos75^\circ & -\sin75^\circ \\ \sin75^\circ & \cos75^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos45^\circ & -\sin45^\circ \\ \sin45^\circ & \cos45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos30^\circ & -\sin30^\circ \\ \sin30^\circ & \cos30^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

이므로 $ab = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = -1$이다. □

일차변환 $f : (x, y) \to (x', y')$에 대하여 (x', y')을 (x, y)로 옮기는 변환을 f의 **역변환**이라고 부르며

$$f^{-1} : (x', y') \to (x, y)$$

로 나타낸다.

역변환의 행렬

일차변환 f의 행렬이 A일 때 역변환 f^{-1}의 행렬은 A^{-1}이다.

예제 40. 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$가 나타내는 일차변환에 의하여 점 $(1, -1)$로 옮겨지는 점의 좌표를 (a, b)라 할 때 a^2+b^2의 값을 구하여라.

풀이 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$이므로 $a^2+b^2=53$이다. □

예제 41. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^4이 나타내는 일차변환에 의하여 점 P가 점 $(-2, 1)$로 옮겨진다. 이때, 행렬 A^3이 나타내는 일차변환에 의하여 점 P가 옮겨지는 점의 좌표를 구하여라.

풀이 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = A^4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

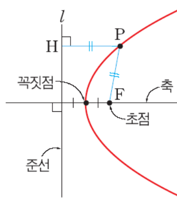
이고, 행렬 A^3에 의해 P가 옮겨지는 점의 좌표를 $\mathrm{P}'(x', y')$이라고 하면

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= A^3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}A^4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

이다. 따라서 구하는 점의 좌표는 $(-3, -1)$이다. □

8 이차곡선

평면 위에 점 F와 이 점을 지나지 않는 직선 l이 있을 때, F로부터의 거리와 l로부터의 거리가 같은 점들의 집합을 **포물선**이라고 부른다. 이때 F를 이 포물선의 **초점**이라고 부르고 l을 이 포물선의 **준선**이라고 부른다.



포물선의 방정식

(1) 초점의 좌표가 $\mathrm{F}(p, 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$이다. (단, $p \neq 0$)

(2) 초점의 좌표가 $\mathrm{F}(0, p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$이다. (단, $p \neq 0$)

증명 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\mathrm{H}(-p, y)$이다. 이때

$$\overline{\mathrm{PF}} = \sqrt{(x-p)^2+y^2}, \ \overline{\mathrm{PH}} = |x+p|$$

이고 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PH}}$이므로

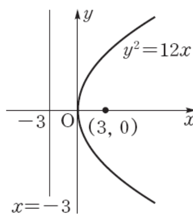
$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = |x+p|$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$y^2 = 4px \qquad \cdots (*)$$

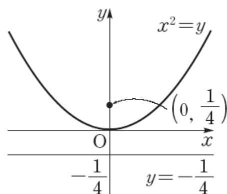
역으로 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 방정식 (*)을 만족시키면 $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PH}}$이므로 점 P는 초점이 $\mathrm{F}(p, 0)$, 준선이 $x=-p$인 포물선 위의 점이다. 따라서 (*)은 구하는 포물선의 방정식이다. 이때 포물선의 꼭짓점은 원점이고, 축의 방정식은 $y=0$이다. ■

예제 42. 포물선 $y^2=12x$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하여라.



풀이 $y^2=12x=4 \cdot 3x$이므로 $p=3$이다. 따라서 초점의 좌표는 $(3, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이다. □

예제 43. 포물선 $x^2=y$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하여라.



풀이 $x^2=4\cdot\frac{1}{4}y$이므로 $p=\frac{1}{4}$

이다.

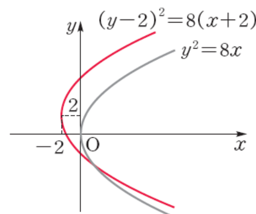
따라서 초점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$,

준선의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}$이다. □

예제 44. 방정식 $y^2-4y=8x+12$가 나타내는 도형을 그려라.

풀이 주어진 방정식을 변형하면

$$(y-2)^2=8(x+2)$$



따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선이고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다. □

예제 45. 포물선 $y^2=4x$와 직선 $y=2x+k$의 위치 관계를 조사하여라.

풀이 $y=2x+k$를 $y^2=4x$에 대입하면

$$(2x+k)^2=4x \qquad \therefore\ 4x^2+4(k-1)x+k^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

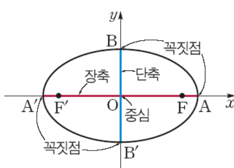
$$\frac{D}{4}=4(k-1)^2-4k^2=-4(2k-1)$$

① $D>0$, 즉 $k<\frac{1}{2}$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

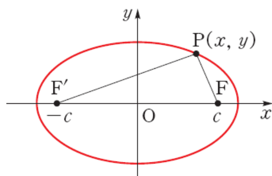
② $D=0$, 즉 $k=\frac{1}{2}$일 때, 한 점에서 만난다(접한다).

③ $D<0$, 즉 $k>\frac{1}{2}$일 때, 만나지 않는다. □

평면 위에 두 점 F, F′이 있을 때, 두 점 F, F′으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 모임을 **타원**이라고 부른다. 이때 F와 F′을 이 타원의 **초점**이라고 부른다.



타원의 방정식을 구해보자. 타원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면



$$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$
$$\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

즉

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이다. 다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

이다. 여기서 $a>c>0$이므로 $b^2=a^2-c^2$으로 놓으면

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

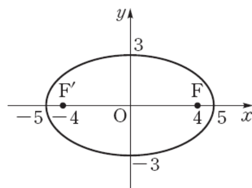
이다. 이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots (*)$$

역으로 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 (*)을 만족시키면 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a$이므로 점 P는 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$에서의 거리의 합이 $2a$인 타원 위의 점이다. 따라서 (*)은 구하는 타원의 방정식이다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

> **타원의 방정식**
>
> (1) 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$과 $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$에서의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은
>
> $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단, } a>b>0,\ b^2=a^2-c^2)$$
>
> 이때 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 $2b$, 꼭짓점의 좌표는 $(\pm a,\ 0)$, $(0,\ \pm b)$, 중심의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.
>
> (2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$와 $\mathrm{F'}(0,\ -c)$에서의 거리의 합이 $2b$인 타원의 방정식은
>
> $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단, } b>a>0,\ a^2=b^2-c^2)$$
>
> 이때 장축의 길이는 $2b$, 단축의 길이는 $2a$, 꼭짓점의 좌표는 $(\pm a,\ 0)$, $(0,\ \pm b)$, 중심의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.

예제 46. 두 초점 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-4,\ 0)$에서의 거리의 합이 10인 타원의 방정식을 구하여라.



풀이 구하는 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

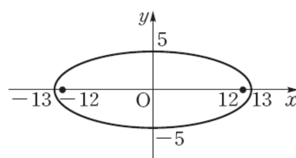
이라고 하면 $c=4$이고 $2a=10$

에서 $a=5$, $b^2=5^2-4^2=9$이므로 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$ □

예제 47. 타원 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하여라.

풀이 $a=13$, $b=5$이므로 $c=\sqrt{13^2-5^2}=12$이다.

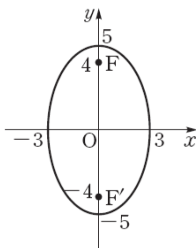


따라서 초점의 좌표는 $(12,\ 0)$, $(-12,\ 0)$,

장축의 길이는 $2a=26$,

단축의 길이는 $2b=10$. □

예제 48. 두 초점 $F(0,\ 4)$, $F'(0,\ -4)$에서의 거리의 합이 10인 타원의 방정식을 구하여라.



풀이 구하는 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

이라고 하면 $c=4$이고 $2b=10$에서

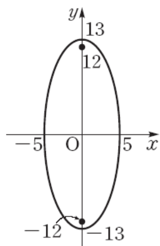
$$b=5,\ a^2=5^2-4^2=9$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

□

예제 49. 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이를 구하여라.



풀이 $a=5$, $b=13$이므로

$c=\sqrt{13^2-5^2}=12$

이다. 따라서

초점의 좌표는 $(0,\ 12)$, $(0,\ -12)$,

장축의 길이는 $2b=26$,

단축의 길이는 $2a=10$. □

예제 50. 방정식 $4x^2+9y^2-16x+36y+16=0$이 나타내는 도형을 그려라.

풀이 주어진 방정식을 변형하면

$$4(x^2-4x+4)+9(y^2+4y+4)=36$$

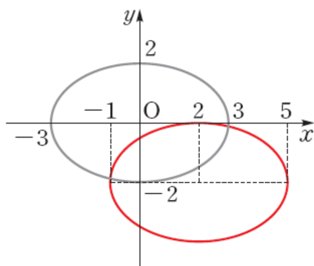
$$\therefore\ \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$을

x축의 방향으로 2만큼,

y축의 방향으로 -2만큼

평행이동한 타원이고, 그 그래프는 아래 그림과 같다.



□

예제 51. 타원 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$과 직선 $y=x+k$의 위치 관계를 조사하여라.

풀이 $y=x+k$를 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$에 대입하면

$$\frac{x^2}{2}+\frac{(x+k)^2}{5}=1$$

$$\therefore\ 7x^2+4kx+2k^2-10=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=4k^2-7(2k^2-10)=-10(k^2-7)$$

① $D>0$, 즉 $-\sqrt{7}<k<\sqrt{7}$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$, 즉 $k=\pm\sqrt{7}$일 때, 한 점에서 만난다(접한다).

③ $D<0$, 즉 $k>\sqrt{7}$ 또는 $k<-\sqrt{7}$일 때, 만나지 않는다.

참고 이차곡선 $f(x,\ y)=0$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구할 때에는 $f(x,\ y)=0$의 식에서

$$x^2\text{을 } x_1x\text{으로, } y^2\text{을 } y_1y\text{로,}$$

$$x\text{를 } \frac{x+x_1}{2}\text{로, } y\text{를 } \frac{y+y_1}{2}\text{로}$$

바꾸면 된다.

보기 52. 포물선 $y^2=-2x$ 위의 점 $(-2,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$$2y=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)\qquad \therefore\ y=-\frac{1}{2}x+1$$

□

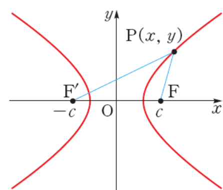
보기 53. 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{3x}{12}+\frac{2y}{16}=1\qquad \therefore\ 2x+y=8$$

□

평면 위에 두 점 F, F′이 있을 때, 두 점 F, F′으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 모임을 **쌍곡선**이라고 부른다. 이때 F와 F′을 이 쌍곡선의 **초점**이라고 부른다.

쌍곡선의 정의를 이용하여 쌍곡선의 방정식을 만들어보자. 쌍곡선 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라고 하면



$$\overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$\overline{PF'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이고, 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=2a$$

이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

즉

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$cx+a^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이다. 다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

이다. 여기서 $c>a>0$이므로 $b^2=c^2-a^2$으로 놓으면

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

이다. 이 식의 양변을 a^2b^2으로 나누면 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\qquad\cdots(*)$$

역으로 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 (*)을 만족시키면 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}|=2a$이므로 점 P는 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$에서의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선 위의 점이다. 따라서 (*)은 구하는 쌍곡선의 방정식이다.

쌍곡선의 방정식

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$과 $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$에서의 거리의 차가 $2a$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단, } c>a>0,\ c^2=a^2+b^2)$$

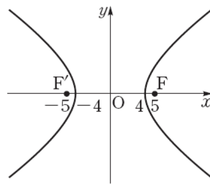
이때 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$, 주축의 길이는 $2a$, 꼭짓점의 좌표는 $(\pm a,\ 0)$, 중심의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ c)$과 $\mathrm{F'}(0,\ -c)$에서의 거리의 차가 $2a$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단, } c>b>0,\ c^2=a^2+b^2)$$

이때 초점의 좌표는 $(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2})$, 주축의 길이는 $2b$, 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ \pm b)$, 중심의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.

예제 54. 두 초점 $\mathrm{F}(5,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-5,\ 0)$에서의 거리의 차가 8인 쌍곡선의 방정식을 구하여라.



풀이 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

이라고 하면 $c=5$이고 $2a=8$에서

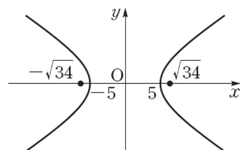
$$a=4,\ b^2=5^2-4^2=9$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$ □

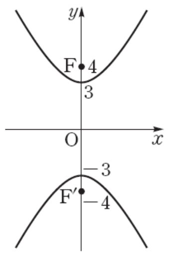
예제 55. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표와 주축의 길이를 구하여라.

풀이 $a=5,\ b=3$이므로 $c=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$이다.



따라서 초점의 좌표는 $(\sqrt{34},\ 0)$, $(-\sqrt{34},\ 0)$, 주축의 길이는 $2a=10$. □

예제 56. 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 4)$, $\mathrm{F'}(0,\ -4)$에서의 거리의 차가 6인 쌍곡선의 방정식을 구하여라.



풀이 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

이라고 하면 $c=4$이고 $2b=6$에서

$$b=3,\ a^2=4^2-3^2=7$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=-1.$$ □

예제 57. $3x^2-4y^2-12x-8y-4=0$이 나타내는 도형을 그려라.

풀이 주어진 방정식을 변형하면

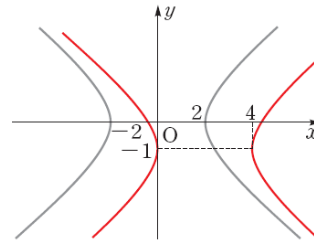
$$3(x^2-4x+4)-4(y^2+2y+1)=12$$

$$\therefore\ \frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{3}=1$$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 쌍곡선

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$$

을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 쌍곡선이고, 그 그래프는 아래 그림과 같다.



□

예제 58. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{2}=1$과 직선 $y=x+k$의 위치 관계를 조사하여라.

풀이 $y=x+k$를 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{2}=1$에 대입하면

$$\frac{x^2}{5}-\frac{(x+k)^2}{2}=1 \quad \therefore\ 3x^2+10kx+5k^2+10=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=25k^2-3(5k^2+10)=10(k^2-3)$$

① $D>0$, 즉 $k>\sqrt{3}$ 또는 $k<-\sqrt{3}$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$, 즉 $k=\pm\sqrt{3}$일 때, 한 점에서 만난다(접한다).

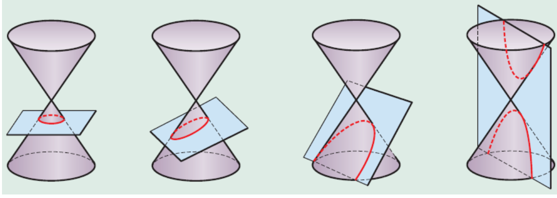
③ $D<0$, 즉 $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$일 때, 만나지 않는다. □

지금까지 배운 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 모두 x, y에 대한 이차방정식으로 나타내어진다. 일반적으로 계수가 실수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

으로 나타내어지는 곡선을 **이차곡선**이라고 부른다.

참고 원뿔을 꼭짓점을 지나지 않는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 둘레가 나타내는 곡선을 원뿔곡선이라고 한다. 이때 자른 평면의 기울기에 따라 다음 그림과 같이 원, 타원, 쌍곡선 등의 곡선을 얻을 수 있다.



즉 밑면에 평행한 평면으로 잘랐을 때는 원, 평면을 조금 기울여서 모선에 평행하기 전에 잘랐을 때는 타원, 모선에 평행한 평면으로 잘랐을 때는 포물선, 모선보다 기울기가 더 급한 평면으로 잘랐을 때는 쌍곡선이 된다. □

9 부등식의 영역

미지수가 하나인 부등식의 영역을 수직선에 나타내는 것처럼 미지수가 두 개인 부등식의 영역은 좌표평면에 나타낼 수 있다.

미지수가 2개인 부등식의 영역
- 부등식 $y>f(x)$의 영역은 곡선 $y=f(x)$의 윗부분이다.
- 부등식 $y<f(x)$의 영역은 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분이다.

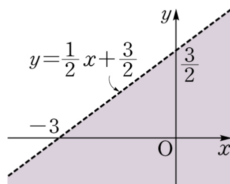
참고 경계가 포함되는 경우는 실선으로 나타내고, 경계가 포함되지 않는 경우는 점선으로 나타낸다.

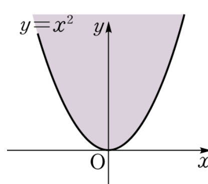
예제 59. 다음 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내어라.

(1) $x-2y+3>0$ (2) $y \ge x^2$

풀이 (1) 주어진 영역은 직선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$의 아랫부분이다. 이때 경계선은 포함되지 않는다.

(2) 주어진 영역은 포물선 $y=x^2$의 윗부분이다. 이때 경계선은 포함된다.



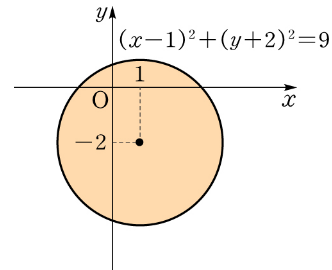


□

원의 내부와 외부
- $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$은 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 내부이다.
- $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$은 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 외부이다.

예제 60. 부등식 $x^2+y^2-2x+4y-4 \le 0$의 영역을 좌표평면에 나타내어라.

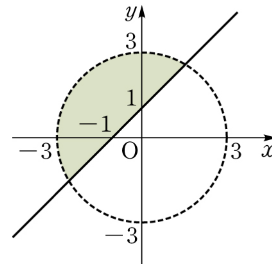
풀이 주어진 영역은 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$의 내부이다.



이때 경계는 포함된다. □

연립부등식의 영역
- 연립부등식의 영역은 각 부등식의 영역이 겹치는 부분이다.
- 좌변에 두 식이 곱해져 있는 $f(x, y)g(x, y)>0$ 꼴의 부등식은 좌표평면을 두 곡선 $f(x, y)=0$, $g(x, y)=0$으로 나누고 각 영역의 포함 여부를 체크한다.

예제 61. 아래 그림의 색칠한 영역을 연립부등식으로 나타내어라.



풀이 색칠한 영역은 원 $x^2+y^2=9$의 경계선을 포함하지 않은 내부이고, 직선 $y=x+1$의 경계선을 포함하는 윗부분이다. 따라서 구하는 연립부등식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x^2+y^2<9 \\ y \ge x+1 \end{cases}$$ □

예제 62. 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

$$(x+y-1)(x^2+y^2-4) \le 0$$

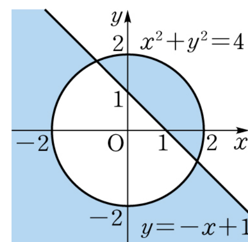
풀이 주어진 부등식

$$(x+y-1)(x^2+y^2-4) \le 0$$

은 두 연립부등식

$$\begin{cases} x+y-1 \ge 0 \\ x^2+y^2-4 \le 0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x+y-1 \le 0 \\ x^2+y^2-4 \ge 0 \end{cases}$$

의 영역이다.



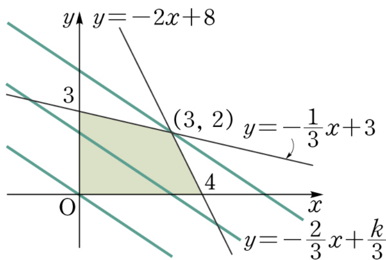
다른 방법 두 도형 $x+y-1=0$, $x^2+y^2=4$를 그리면 좌표평면이 4개의 영역을 나뉜다. 이때 $(0, 0)$을 대입하면 부등식이 성립하지 않음을 알 수 있다. 따라서 $(0, 0)$이 포함된 영역이 제외되도록 교대로 영역을 택해주면 된다. □

예제 63. 다음 연립부등식의 영역에 있는 점 (x, y)에 대하여 $2x+3y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

$$x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ 2x+y \le 8,\ \ x+3y \le 9$$

해설 주어진 영역을 좌표평면에 나타낸다. 그리고 최댓값 또는 최솟값을 구하려는 식을 k로 두고 좌표평면에 그래프로 나타낸다. 끝으로 그래프가 영역과 만나는 범위 내에서 그래프를 움직여 k의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 주어진 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 아래 그림의 색칠한 부분과 같다.



$2x+3y=k$로 놓으면

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{k}{3} \qquad \cdots (*)$$

이므로 이 방정식은 기울기가 $-\frac{2}{3}$, y절편이 $\frac{k}{3}$인 직선을 나타낸다. 직선 $(*)$를 주어진 부등식의 영역 안에서 움직여 보면 직선 $(*)$가 두 직선 $2x+y=8$, $x+3y=9$의 교점 $(3, 2)$를 지날 때 y절편이 최대이므로 k의 최댓값은

$$2 \cdot 3+3 \cdot 2=12$$

이다. 또 원점 O를 지날 때 y절편이 최소이므로 k의 최솟값은

$$2 \cdot 0+3 \cdot 0=0$$

이다.

다른 방법 영역이 사각형이므로 사격형의 네 꼭짓점의 좌표를 각각 $2x+3y$에 대입하여 가장 큰 값과 가장 작은 값을 구한다.

예제 64. 다음 표는 두 종류의 영양제 A, B의 1정당 함유된 두 성분 α, β의 양을 나타낸 것이다.

영양제 \ 성분	α(mg)	β(mg)
A	2	1
B	1	3

어떤 사람이 하루에 성분 α는 15mg 이상, 성분 β는 10mg 이상을 섭취하려고 할 때, 하루에 먹어야 할 두 영양제의 최소 개수의 합을 구하여라.

풀이 영양제 A, B를 각각 x개, y개 먹는다고 하자. 그러면 이 문제는 영역 $x \ge 0$, $y \ge 0$, $2x+y \ge 15$, $x+3y \ge 10$에서 식 $x+y$의 최솟값을 구하는 문제이다. 앞의 예제에서와 같은 방법으로 $x+y=k$라고 두고 풀면 $x=7$, $y=1$일 때 최솟값 $x+y=8$을 얻는다. □

10 공간도형

모든 면이 다각형으로 이루어진 도형을 **다면체**라고 부른다. 특히 모든 면이 서로 합동인 정다각형이고 꼭짓점에 모인 면의 개수가 같은 다면체를 **정다면체**라고 부른다. 정다면체는 다음과 같이 5개 뿐이다.

정다면체	면의모양	꼭지점 수	모서리 수	면 수
정사면체	정삼각형	4	6	4
정육면체	정사각형	8	12	6
정팔면체	정삼각형	6	12	8
정십이면체	정오각형	20	30	12
정이십면체	정삼각형	12	30	20

참고로 볼록다면체에서 (꼭짓점 수)−(모서리 수)+(면의 수)=2가 성립한다.

뿔을 밑면에 평행한 평면으로 잘라 생긴 두 개의 도형 중에서 뿔이 아닌 부분을 **뿔대**라고 부른다.

한 직선을 축으로 평면도형을 회전시킬 때 생기는 도형을 **회전체**라고 부른다. 회전체의 성질은 다음과 같다.

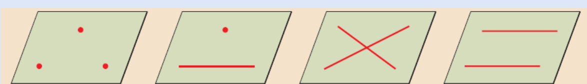
- 회전체에서 한 선분이 회전하여 옆면을 이룰 때, 그 선분을 **모선**이라고 부른다.
- 지름을 축으로 원을 회전시킨 회전체를 **구**라고 부른다.
- 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자르면 단면은 원이다.
- 회전체를 회전축을 포함하는 어느 평면으로 잘라도 그 잘린 면은 모두 서로 합동이고, 회전축에 대하여 선대칭도형이다.

여러 가지 입체도형의 부피와 겉넓이는 다음과 같다.

- (기둥의 부피)=(밑넓이)×(높이)
- (기둥의 겉넓이)=(밑넓이)×2 +(옆넓이)
- 특히 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥의 부피는 $\pi r^2 h$이고 겉넓이는 $2\pi r^2+2\pi rh$이다.
- (뿔의 부피)$=\frac{1}{3}\times$(밑넓이)×(높이)
- 특히 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$이다.
- (뿔의 겉넓이)=(밑넓이)+(옆넓이)
- 특히 밑면의 반지름의 길이가 r이고 모선의 길이가 l인 원뿔의 겉넓이는 $\pi r^2+\pi lr$이다.
- 반지름이 r인 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$이고 겉넓이는 $4\pi r^2$이다.

평면의 결정조건

① 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점
② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점
③ 한 점에서 만나는 두 직선
④ 평행한 두 직선

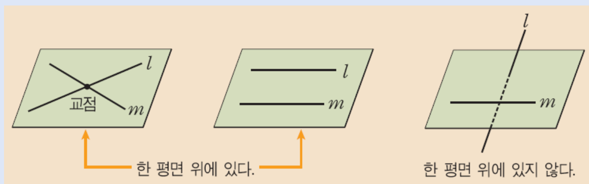


예제 65. 공간에서 어느 네 점도 같은 평면 위에 있지 않은 다섯 개의 점은 몇 개의 평면을 결정하는가?

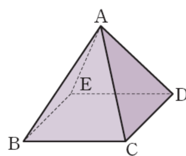
풀이 5개의 점 중에서 순서를 고려하지 않고 3개를 택하는 경우의 수는 $\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=20$이다. □

공간에서 두 직선의 위치 관계

① 한 점에서 만난다.
② 평행하다.
③ 꼬인 위치에 있다.



예제 66. 오른쪽 그림과 같이 밑면이 정사각형이고, 옆면이 모두 정삼각형인 사각뿔에서 다음을 구하여라.



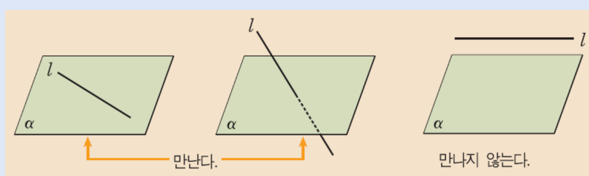
(1) 모서리 AB와 만나는 모서리
(2) 모서리 BC와 평행한 모서리
(3) 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리

풀이 (1) 모서리 AC, AD, AE, BE, BC
(2) 모서리 ED
(3) 모서리 CD, ED □

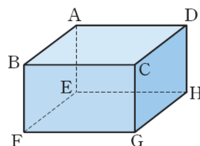
공간에서 직선과 평면은 만나는 경우와 만나지 않는 경우가 있다. 직선 l과 평면 α가 만나는 경우, 직선 l은 평면 α에 포함되거나 한 점에서만 만나게 된다. 한편 직선 l과 평면 α가 만나지 않는 경우, 직선 l과 평면 α는 **평행**하다고 말하며, 이것을 기호로 $l /\!/ \alpha$와 같이 나타낸다.

직선과 평면의 위치 관계

① 포함된다. ② 한 점에서 만난다. ③ 평행하다.



예제 67. 오른쪽 그림의 직육면체에서 다음을 구하여라.



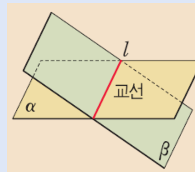
(1) 모서리 AB를 포함하는 면
(2) 모서리 AB와 한 점에서 만나는 면
(3) 면 BFGC와 평행한 모서리
(4) 면 ABFE와 한 점에서 만나는 모서리

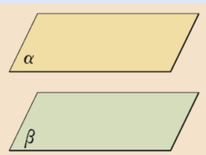
풀이 (1) □ABCD, □ABFE
(2) □AEHD, □BFGC
(3) 모서리 AD, AE, DH, EG
(4) 모서리 AD, BC, FG, EH □

공간에서 서로 다른 두 평면은 만나는 경우와 만나지 않는 경우가 있다. 서로 다른 두 평면 α, β가 만나는 경우, 두 평면은 한 직선을 공유한다. 이때 이 직선을 두 평면의 **교선**이라고 한다. 한편 서로 다른 두 평면 α, β가 만나지 않는 경우, 두 평면 α, β는 평행하다고 하며, 이것을 기호로 $\alpha /\!/ \beta$와 같이 나타낸다.

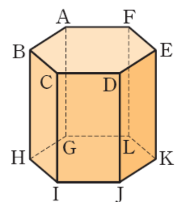
두 평면의 위치 관계

① 만난다. ② 평행하다.





예제 68. 오른쪽 그림과 같이 두 밑면이 정육각형인 육각기둥에서 다음을 구하여라.

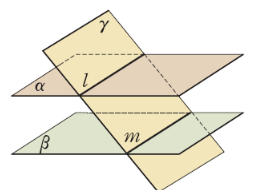


(1) 면 BHIC와 평행한 면
(2) 면 CIJD와 만나는 면
(3) 면 DJKE와 면 EKLF의 교선

풀이 (1) 면 EKLF
(2) 면 BHIC, DJKE, ABCDEF, GHIJKL
(3) 모서리 EK □

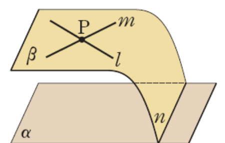
참고 공간에서 두 직선이 평행하다는 것을 증명하려면 두 직선이 한 평면에 있으면서 만나지 않는다는 것을 보이면 된다.

예제 69. 오른쪽 그림과 같이 평행한 두 평면 α, β가 평면 γ와 만날 때 생기는 두 교선을 l, m이라고 하자. 이때 $l /\!/ m$임을 증명하여라.



풀이 두 평면 α, β는 평행하므로 만나지 않는다. 이때 l은 α 위에 있고, m은 β 위에 있으므로 두 직선 l, m도 만나지 않는다.
그런데 두 직선 l, m은 모두 한 평면 γ 위에 있으므로 $l /\!/ m$이다. □

예제 70. 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P를 지나고, 평면 α에 평행한 두 직선 l, m에 의하여 결정되는 평면 β는 평면 α와 평행함을 증명하여라.



풀이 오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β가 평행하지 않고 교선 n을 공유한다고 가정하자.
이때 교선 n은 평면 α에 포함되고

$$l /\!/ \alpha,\ m /\!/ \alpha$$

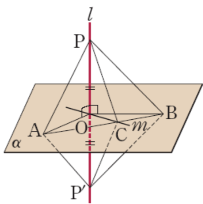
이므로 직선 n은 두 직선 l, m과 만나지 않는다.
그런데 세 직선 l, m, n은 모두 평면 β에 포함되므로

$$l /\!/ n,\ m /\!/ n$$

이다. 따라서 $l /\!/ m$이다. 이것은 두 직선 l, m이 점 P에서 만난다는 사실에 모순이다. 따라서 $\alpha /\!/ \beta$이다. □

예제 71. 평면 α와 한 점 O에서 만나는 직선 l이 있다. 이때 직선 l이 점 O에서 만나는 평면 α 위의 서로 다른 두 직선과 수직이면 $l \perp \alpha$임을 증명하여라.

풀이 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 $l \perp \overline{OA}$, $l \perp \overline{OB}$인 두 점 A, B를 잡고, 점 O를 지나는 평면 α 위의 임의의 직선을 m, 직선 m이 직선 AB와 만나는 점을 C라고 하자.



직선 l 위에 $\overline{PO}=\overline{P'O}$인 두 점 P, P′을 잡으면 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$는 $\overline{PP'}$의 수직이등분선이므로

$$\overline{AP}=\overline{AP'},\ \overline{BP}=\overline{BP'}$$

$\overline{AP}=\overline{AP'}$, $\overline{BP}=\overline{BP'}$, $\overline{AB}$는 공통이므로

$$\triangle ABP \equiv \triangle ABP' \quad \therefore\ \angle PAC = \angle P'AC$$

$\overline{AP}=\overline{AP'}$, $\angle PAC = \angle P'AC$, $\overline{AC}$는 공통이므로

$$\triangle PAC \equiv \triangle P'AC \quad \therefore\ \overline{PC}=\overline{P'C}$$

$\overline{PO}=\overline{P'O}$이고 $\overline{PC}=\overline{P'C}$이므로 $\overline{PP'} \perp \overline{OC}$, 즉 $l \perp m$이다. 따라서 l은 점 O를 지나는 α 위의 임의의 직선과 수직이므로 $l \perp \alpha$이다. □

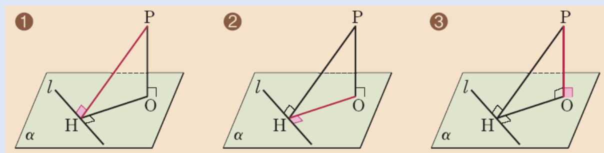
삼수선의 정리

평면 α 위에 있지 않은 점 P, α 위의 점 O를 지나지 않는 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 점 H에 대하여 다음이 성립한다.

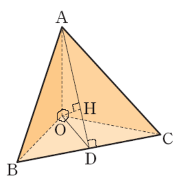
① $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp l$이면 $\overline{PH} \perp l$

② $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp l$이면 $\overline{OH} \perp l$

③ $\overline{PH} \perp l$, $\overline{OH} \perp l$, $\overline{PO} \perp \overline{OH}$이면 $\overline{PO} \perp \alpha$



예제 72. 오른쪽 그림의 사면체에서 세 모서리 OA, OB, OC는 각각 서로 수직이다. 꼭짓점 A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 꼭짓점 O에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 다음을 증명하여라.



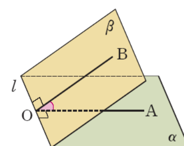
(1) $\overline{OD} \perp \overline{BC}$ (2) $\overline{OH} \perp$(평면 ABC)

풀이 (1) $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, $\overline{OA} \perp \overline{OC}$이므로 $\overline{OA} \perp$(평면 OBC)이다. 또 $\overline{BC}$는 평면 OBC 위에 있고, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$이므로 삼수선의 정리 ②에 의하여 $\overline{OD} \perp \overline{BC}$이다.

(2) 주어진 조건에 의하여 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{OH} \perp \overline{AD}$이고 위의 (1)에 의하여 $\overline{OD} \perp \overline{BC}$이다. 따라서 삼수선의 정리 ③에 의하여 $\overline{OH} \perp$(평면 ABC)이다. □

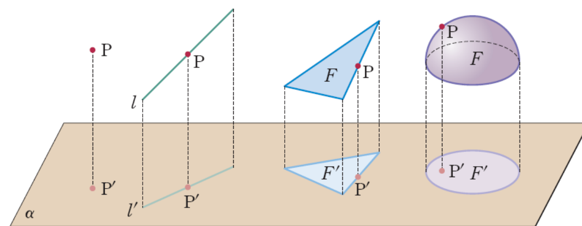
직선 l을 공유하는 두 반평면 α, β로 이루어진 도형을 **이면각**이라고 부른다. 이때 직선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α, β를 각각 **이면각의 면**이라고 부른다.

또 이면각의 변 l 위의 한 점 O를 지나고 l에 수직인 반직선 OA, OB를 반평면 α, β 위에 각각 그을 때, $\angle AOB$의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 일정한 각의 크기를 **이면각의 크기**라고 부른다. 두 평면이 만나면 네 개의 이면각이 생기는데, 이 중 한 이면각의 크기를 **두 평면이 이루는 각의 크기**라고 부른다.



특히 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 $90°$일 때, 두 평면 α, β는 **수직**이라고 부르며, 이것을 기호로 $\boldsymbol{\alpha \perp \beta}$로 나타낸다.

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 P′이라고 할 때, 점 P′을 점 P의 평면 α 위로의 **정사영**이라고 부른다.



일반적으로 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 **α 위로의 정사영**이라고 부른다.

정사영의 길이와 넓이

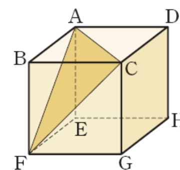
(1) 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A′B′, 직선 AB와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$$

(2) 평면 β 위에 있는 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 할 때, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$S' = S\cos\theta$$

예제 73. 오른쪽 그림의 정육면체에서 평면 AFC와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



풀이 밑면 EFGH를 포함하는 평면을 α라고 하면 삼각형 AFC의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형 EFG이다. $\overline{AB}=a$로 놓으면

$$\triangle EFG = \frac{1}{2}a^2$$

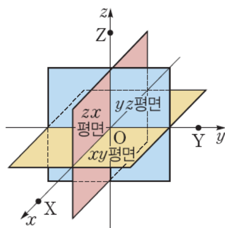
또 $\overline{AC}=\sqrt{2}a$이고 삼각형 AFC는 정삼각형이므로

$$\triangle AFC = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

이때 $\triangle EFG = \triangle AFC\cos\theta$이므로

$$\cos\theta = \frac{\triangle EFG}{\triangle AFC} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ □

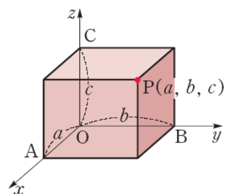
11 공간좌표



오른쪽 그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선 OX, OY, OZ를 긋는다. 이때 점 O를 원점, 세 수직선 OX, OY, OZ를 각각 **x축, y축, z축**이라 부르고, 이들을 통틀어 **좌표축**이라고 한다.

또한 x축과 y축을 포함하는 평면을 **xy평면**, y축과 z축을 포함한 평면을 **yz평면**, z축과 x축을 포함한 평면을 **zx평면**이라 부르고, 이들 세 평면을 통틀어 **좌표평면**이라고 한다.

공간에 있는 임의의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나고 yz평면, zx평면, xy평면에 평행한 평면이 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 하자. 이때 세 점 A, B, C의 x축, y축, z축 위에서의 좌표를 각각 a, b, c라고 하면, 점 P에 대응하는 세 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 정해진다.



역으로 세 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 주어지면 공간의 한 점 P가 정해진다. 따라서 공간의 한 점 P와 세 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 사이에는 일대일대응의 관계가 성립한다.

이 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 점 P의 **공간좌표** 또는 **좌표**라고 하며, a, b, c를 차례로 점 P의 **x좌표**, **y좌표**, **z좌표**라고 부른다. 점 P의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, 이것을 기호로

$$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$$

와 같이 나타낸다. 또 이와 같이 임의의 점 P의 좌표가 주어진 공간을 **좌표공간**이라고 한다.

좌표공간에서 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수인 점들의 모임을 **제 1 팔분공간**이라고 부른다. 다른 팔분공간의 이름은 정해지지 않았다.

> **좌표공간에서 두 점 사이의 거리**
> 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 사이의 거리는
> $$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

예제 74. 두 점 A(2, 3, 5), B(6, 5, 3)에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

풀이 점 P의 좌표를 $(a,\ 0,\ 0)$으로 놓으면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$$

즉 $(a-2)^2+3^2+5^2=(a-6)^2+5^2+3^2$이므로

$$a^2-4a+4+9+25=a^2-12a+36+25+9$$

이다. 이것을 풀면 $a=4$이다. 따라서 점 P의 좌표는 $(4,\ 0,\ 0)$이다. □

> **좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점**
> 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여
> ① 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점 P의 좌표는
> $$\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$
> ② 선분 AB를 $m : n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는
> $$\mathrm{Q}\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

예제 75. 두 점 A(1, 2, −3), B(−2, 5, 3)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표를 구하여라.

풀이 $\mathrm{P}\left(\frac{2\cdot(-2)+1\cdot1}{2+1},\ \frac{2\cdot5+1\cdot2}{2+1},\ \frac{2\cdot3+1\cdot(-3)}{2+1}\right)$

$\mathrm{Q}\left(\frac{2\cdot(-2)-1\cdot1}{2-1},\ \frac{2\cdot5-1\cdot2}{2-1},\ \frac{2\cdot3-1\cdot(-3)}{2-1}\right)$

이므로 구하는 두 점은 $\mathrm{P}(-1,\ 4,\ 1)$, $\mathrm{Q}(-5,\ 8,\ 9)$이다. □

12 공간도형의 방정식

좌표평면에서 여러 가지 도형을 방정식으로 나타낸 것처럼 좌표공간에서도 여러 가지 도형을 방정식으로 나타낼 수 있다.

> **평행이동한 도형의 방정식**
> 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼, z축의 방향으로 c만큼 평행이동한 도형의 방정식은 x를 $x-a$로 바꾸고 y를 $y-b$로 바꾸고 z를 $z-c$로 바꾸어 주면 된다.

공간의 고정된 한 점으로부터 거리가 일정한 점들의 모임을 **구**라고 부른다. 이때 고정된 점을 **구의 중심**이라고 부르고 일정한 거리를 **구의 반지름**이라고 부른다. 중심이 $(a,\ b,\ c)$이고 반지름이 r인 구 위의 점을 $(x,\ y,\ z)$라고 하면

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

이므로 다음과 같은 구의 방정식을 얻는다.

> **구의 방정식**
> 중심이 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은
> $$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

참고 구의 방정식의 일반형은

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

이다. (단, $A^2+B^2+C^2-4D>0$)

만약 $A^2+B^2+C^2-4D=0$이면 이 방정식은 하나의 점을 나타내고, $A^2+B^2+C^2-4D<0$이면 이 방정식을 만족시키는 점은 존재하지 않는다. □

예제 76. 두 점 A(2, 3, 5), B(6, 5, 3)을 지름의 양 끝점으로 하는 구의 방정식을 구하여라.

풀이 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 구의 중심을 C라고 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{3+5}{2},\ \frac{5+3}{2}\right),\ 즉\ C(4,\ 4,\ 4)$$

또 구의 반지름의 길이는

$$\overline{CA}=\sqrt{(4-2)^2+(4-3)^2+(4-5)^2}=\sqrt{6}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

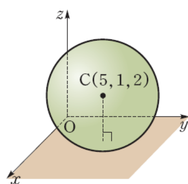
$$(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=6$$ □

예제 77. 중심이 (5, 1, 2)이고 xy평면에 접하는 구의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 구의 반지름의 길이를 r라고 하면 구의 방정식은

$$(x-5)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=r^2$$

이 구가 xy평면에 접하므로 이 구의 반지름의 길이는 2이다. 따라서 구하는 구의 방정식은



$$(x-5)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$$ □

예제 78. 방정식 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$은 어떤 도형을 나타내는지 구하여라.

풀이 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$을 변형하면

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2-6z+9=16$$

$$\therefore\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4^2$$

따라서 주어진 방정식은 중심이 (1, −2, 3)이고 반지름의 길이가 4인 구를 나타낸다. □

이번에는 좌표공간에서 원점을 지나는 직선의 방정식을 생각해 보자. 원점이 아닌 점 P$(l,\ m,\ n)$가 주어졌다고 하자. 그리고 $l,\ m,\ n$이 모두 0이 아니라고 하자. 이때 xy평면에 대하여 직선 OP의 정사영은 xy평면 위의 직선이 된다. 이 직선은 원점과 점 $(l,\ m)$을 지나므로 이 직선의 방정식은

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 마찬가지로 yz평면과 xz평면에 대하여 직선 OP의 정사영은 각각 yz평면과 xz 평면 위의 직선이 되는데, 이들 직선의 방정식은

$$\frac{y}{m}=\frac{z}{n},\quad \frac{z}{n}=\frac{x}{l}$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 이들을 모두 연립하면 직선 OP의 방정식은

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 또한 도형의 평행이동의 성질에 의하여, 직선 OP와 평행하고 점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}\quad (단,\ lmn\neq 0)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

직선의 방정식

원점이 아닌 점 P$(l,\ m,\ n)$이 주어졌을 때, 직선 OP와 평행하고 점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}\quad (단,\ lmn\neq 0)$$

예제 79. 점 A(5, −2, 3)을 지나고, 직선

$$x-3=\frac{5-y}{3}=\frac{z}{2}$$

와 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 주어진 직선의 방정식을 변형하면

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z}{2}$$

이므로 이 직선은 원점과 점 (1, −3, 2)를 잇는 직선과 평행하다. 따라서 구하는 직선의 방정식은

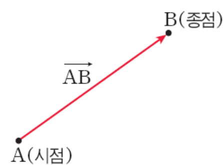
$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-(-2)}{-3}=\frac{z-3}{2}$$

즉 $x-5=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$이다. □

13 벡터의 뜻

크기와 방향을 함께 갖는 양을 **벡터**라고 부른다.

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 점 B로 향하는 방향과 크기가 주어진 선분 AB를 벡터 AB라고 하며, 이것을 기호로

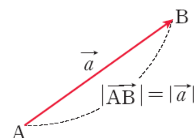


$$\overrightarrow{AB}$$

와 같이 나타낸다. 이때 점 A를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 **시점**, 점 B를 $\overrightarrow{AB}$의 **종점**이라고 한다. 또 벡터를 한 문자로 나타낼 때에는 다음과 같이 나타낸다.

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \cdots$$

또한 선분 AB의 길이를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 **크기**라고 부르며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.



$$|\overrightarrow{AB}|\quad 또는\quad |\vec{a}|$$

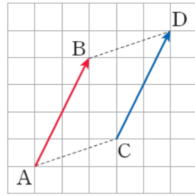
특히 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라고 부른다.

한편 한 점은 시점과 종점이 일치하는 벡터로 생각하여 이를 **영벡터**라고 부르고 기호로 $\vec{0}$와 같이 나타낸다. 영벡터는 크기가 0이며 방향은 생각하지 않기로 한다.

벡터는 평면 또는 공간 어디에서든 생각할 수 있으나, 이것을 구별할 필요가 있을 때에는 평면에서의 벡터를 **평면벡터**라 부르고, 공간에서의 벡터를 **공간벡터**라고 부른다.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 크기와 방향이 각각 같을 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 **서로 같다**고 하며, 이것을 기호로 $\vec{a}=\vec{b}$로 나타낸다.

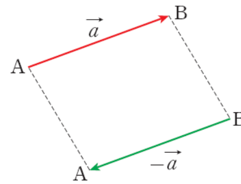
오른쪽 그림에서 $\overrightarrow{AB}$를 평행이동하면 $\overrightarrow{CD}$와 포개어지므로 두 벡터는 시점의 위치는 다르지만 그 크기와 방향이 각각 같다. 따라서 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$이다.



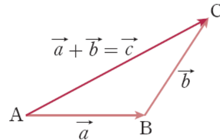
벡터 $\vec{a}$에 대하여 크기는 같고, 방향이 반대인 벡터를 기호로

$$-\vec{a}$$

와 같이 나타낸다. 즉 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$이다.

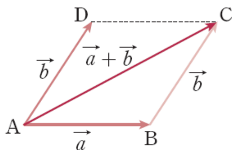


두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 주어질 때, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$가 되도록 세 점 A, B, C를 잡는다. 이때 $\overrightarrow{AC}$로 나타내어지는 벡터 $\vec{c}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 **합**이라고 부르며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.



$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \quad \text{즉} \quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

또 벡터의 합은 평행사변형을 이용하여 나타낼 수 있다. 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$가 되도록 세 점 A, B, D를 잡고, □ABCD가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$이므로 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$이다. 즉 다음이 성립한다.



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$$

벡터의 덧셈에 대한 연산법칙

임의의 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

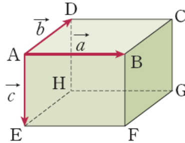
① 교환법칙 : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

② 결합법칙 : $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

예제 80. 오른쪽 그림의 직육면체에서

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\vec{b},\ \overrightarrow{AE}=\vec{c}$$

라고 할 때, $\overrightarrow{AC}$와 $\overrightarrow{AG}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내어라.



풀이 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. □

임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$라고 하면

$$\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$$

이다. 또 $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$이므로

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$$

이다. 따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

벡터의 덧셈에 대한 항등원과 역원

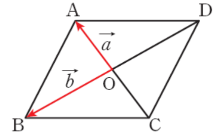
$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$$
$$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 벡터 $\vec{a}$와 벡터 $-\vec{b}$의 합 $\vec{a}+(-\vec{b})$를 기호로

$$\vec{a}-\vec{b}$$

와 같이 나타내고, 이것을 벡터 $\vec{a}$에서 벡터 $\vec{b}$를 뺀 **차**라고 부른다. 즉 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$이다.

예제 81. 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 대각선의 교점을 O라 하고 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{BC}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



풀이 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\vec{a}+\vec{b}$,
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CO}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=-\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}-\vec{b}$. □

벡터의 실수배

(1) $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때, $k\vec{a}$는

① $k>0$이면 방향은 $\vec{a}$와 같고, 크기는 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.

② $k<0$이면 방향은 $\vec{a}$와 반대이고, 크기는 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.

③ $k=0$이면 영벡터 $\vec{0}$이다.

(2) $\vec{a}=\vec{0}$일 때, 임의의 실수 k에 대하여 $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

참고 위의 정의에 의하여 다음을 알 수 있다.

$$1\vec{a}=\vec{a},\ (-1)\vec{a}=-\vec{a},\ 0\vec{a}=\vec{0},\ k\vec{0}=\vec{0}$$

벡터의 실수배에 대한 연산법칙

실수 k, l과 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

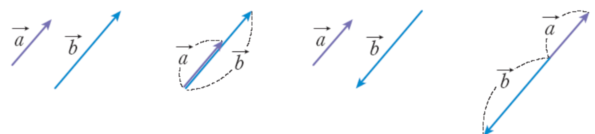
① 결합법칙 : $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

② 분배법칙 : $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 같거나 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 **평행하다**고 말하며, 이것을 기호로

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

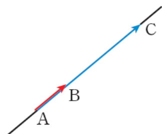
와 같이 나타낸다. 다음은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행한 경우이다.



> **벡터의 평행**
> 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
> $\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ (k는 0이 아닌 실수)

참고 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}\perp\vec{0}$인 동시에 $\vec{a} /\!/ \vec{0}$이다.

참고 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하면, $\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{AC}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.



역으로 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

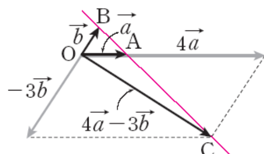
예제 82. 평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=4\vec{a}-3\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있음을 증명하여라.

풀이 ① $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

② $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$
$=(4\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}$
$=3\vec{a}-3\vec{b}=-3(\vec{b}-\vec{a})$



따라서 ①, ②에서 $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}$이다. 즉 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다. □

14 벡터의 내적

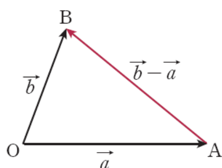
평면 또는 공간에서 한 점 O를 고정시키면 임의의 벡터 $\vec{p}$에 대하여 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$인 점 P의 위치가 오직 하나로 정해진다. 역으로 임의의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$인 벡터 $\vec{p}$가 오직 하나로 정해진다.

즉 시점을 한 점 O로 고정하면 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 평면 또는 공간 위의 한 점 P는 일대일로 대응한다.

이와 같이 한 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 점 O에 대한 점 P의 **위치벡터**라고 부른다. 일반적으로 위치벡터의 시점 O는 좌표평면 또는 좌표공간의 원점으로 잡는다.

벡터 $\overrightarrow{AB}$를 점 A와 점 B의 위치벡터로 나타내어 보자. 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에 대하여

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$



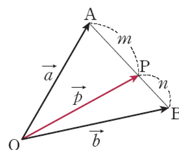
이므로 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 하면 다음이 성립한다.

> $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

예제 83. 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

임을 증명하여라.



풀이 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$이므로

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$ ...... ①

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$이므로

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\vec{p}-\vec{a}$ ...... ②

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$ ...... ③

②, ③을 ①에 대입하면

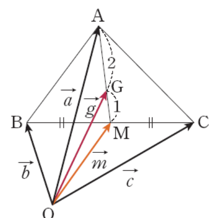
$$\vec{p}-\vec{a}=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})\qquad \therefore\ \vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$ □

예제 84. 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 할 때, △ABC의 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$는 다음과 같음을 증명하여라.

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

풀이 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라고 하면 점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은

$$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

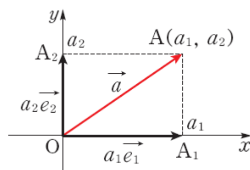


또 △ABC의 무게중심 G는 중선 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\vec{g}=\frac{2\vec{m}+\vec{a}}{2+1}=\frac{2\times\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{a}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$ □

좌표평면 위의 두 점 $E_1(1,\ 0)$, $E_2(0,\ 1)$의 위치벡터를 각각 단위벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$로 나타낸다.

임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$가 되는 점 $A(a_1,\ a_2)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발은 각각 $A_1(a_1,\ 0)$, $A_2(0,\ a_2)$이다.



그런데

$$\overrightarrow{OA_1}=a_1\vec{e_1},\ \overrightarrow{OA_2}=a_2\vec{e_2}$$

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$$

이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

> $\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$

이때 실수 a_1, a_2를 벡터 $\vec{a}$의 **성분**이라고 부르며, a_1을 **x성분**, a_2를 **y성분**이라고 한다.

또 벡터 $\vec{a}$는 성분을 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$$

두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 서로 같을 조건을 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

평면벡터의 크기

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$일 때, $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

벡터의 크기는 **절댓값** 또는 **노름**(norm)이라고 부르기도 한다.

보기 85. 좌표평면에서 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{0}$를 성분으로 나타내면

$$\vec{e_1}=(1,\ 0),\ \vec{e_2}=(0,\ 1),\ \vec{0}=(0,\ 0)$$

이다. 또한 $\vec{a}=2\vec{e_1}+3\vec{e_2}$를 성분으로 나타내면

$$\vec{a}=(2,\ 3)$$

이다. 이때 이 벡터들의 크기를 구하면

$$|\vec{e_1}|=1,\ |\vec{e_2}|=1,\ |\vec{0}|=0,\ |\vec{a}|=\sqrt{13}$$

이다. □

평면벡터의 성분에 의한 연산

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때,

① $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

② $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

③ $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수)

예제 86. $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$, $\vec{c}=(4,\ 3)$일 때, $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 만족시키는 실수 k, l의 값을 구하여라.

풀이 $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned}(4,\ 3)&=k(2,\ -1)+l(-1,\ 3)=(2k,\ -k)+(-l,\ 3l)\\&=(2k-l,\ -k+3l)\end{aligned}$$

벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2k-l=4,\ -k+3l=3$$

이므로 두 식을 연립하여 풀면 $k=3$, $l=2$이다. □

평면벡터의 성분과 크기

두 점 $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$에 대하여

① $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

② $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

보기 87. 두 점 $A(2,\ 1)$, $B(1,\ 0)$에 대하여

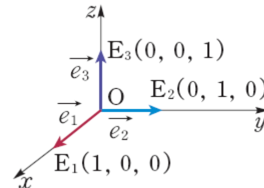
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,\ 0)-(2,\ 1)=(-1,\ -1)$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

□

좌표공간에서 세 점

$$E_1(1,\ 0,\ 0),\ E_2(0,\ 1,\ 0),\ E_3(0,\ 0,\ 1)$$

의 위치벡터를 각각 단위벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$으로 나타낸다.



임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$가 되는 점 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발은 각각

$$A_1(a_1,\ 0,\ 0),\ A_2(0,\ a_2,\ 0),\ A_3(0,\ 0,\ a_3)$$

이다. 그런데

$$\overrightarrow{OA_1}=a_1\vec{e_1},\ \overrightarrow{OA_2}=a_2\vec{e_2},\ \overrightarrow{OA_3}=a_3\vec{e_3}$$

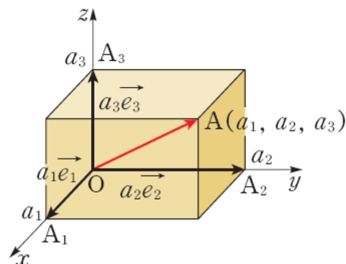
이고

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}$$

이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$$

이때 실수 a_1, a_2, a_3을 벡터 $\vec{a}$의 **성분**이라고 부르며, a_1을 **x성분**, a_2를 **y성분**, a_3을 **z성분**이라고 한다.



또 벡터 $\vec{a}$는 성분을 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이 서로 같을 조건을 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

공간벡터의 크기

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$일 때, $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$

참고 벡터를 나타내는 성분의 개수에 따라 차원이 달라진다. 예를 들어 성분이 4개인 벡터 (a_1, a_2, a_3, a_4)들을 모두 모은 집합은 4차원 공간이 된다.

공간벡터의 성분에 의한 연산

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$일 때,

① $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

② $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$

③ $k\vec{a}=(ka_1, ka_2, ka_3)$ (단, k는 실수)

참고 n차원 벡터

$$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n),\ \vec{b}=(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$$

과 실수 k에 대하여

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \cdots, a_n+b_n),$$
$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \cdots, a_n+b_n),$$
$$k\vec{a}=(ka_1, ka_2, ka_3, \cdots, ka_n)$$

이다. ■

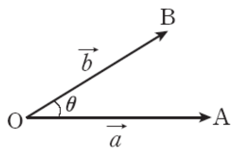
공간벡터의 성분과 크기

두 점 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$에 대하여

① $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$

② $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

평면 또는 공간에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$일 때, $\angle\mathrm{AOB}=\theta\,(0\le\theta\le\pi)$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 **각**이라고 부른다.



영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때,

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라고 부르며, 기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$로 나타낸다. 즉

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이다. 단, $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정한다.

벡터의 내적과 성분

① $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

② $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

보기 88. $\vec{a}=(-1, 2)$, $\vec{b}=(2, 3)$일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times2+2\times3=4.$$

또한 $\vec{a}=(2, -1, 3)$, $\vec{b}=(3, 1, -2)$일 때,

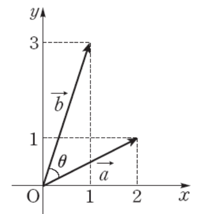
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3+(-1)\times1+3\times(-2)=-1.$$ □

두 벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때,

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

예제 89. 두 벡터 $\vec{a}=(2, 1)$, $\vec{b}=(1, 3)$이 이루는 각의 크기를 구하여라.



풀이 $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+1\times3=5.$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

그런데 $0\le\theta\le\pi$이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$이다. □

벡터의 내적과 수직, 평행 조건

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① 수직 조건 : $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

② 평행 조건 : $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

내적은 실수의 곱셈과 비슷한 성질을 가지고 있다.

내적의 연산법칙

① 교환법칙 : $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

② 결합법칙 : $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

(단, k는 실수)

③ 분배법칙 : $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

예제 90. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$임을 이용하여 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

풀이 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ □

예제 91. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}+\vec{b}|=3$일 때, 다음 값을 구하여라.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (2) $|2\vec{a}-\vec{b}|$

풀이 (1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$이므로

$3^2=1^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2$, $2\vec{a}\cdot\vec{b}=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$.

(2) $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4\times1^2-4\times2+2^2=0$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=0$. □

15 벡터를 이용한 도형의 방정식

좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고, 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}=(l, m, n)$에 평행한 직선 g의 방정식을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 직선 g 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y, z)$라 고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}/\!/\vec{u}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{u}$$

인 실수 t가 존재한다.

이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\vec{p}-\vec{a}=t\vec{u},\ \text{즉}\ \vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}\ (t\text{는 실수}) \quad \cdots\cdots ①$$

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 직선 g 위에 있다. 따라서 ①은 점 A를 지나고 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 g를 나타낸다. 이때 ①을 직선 g의 **벡터방정식**이라고 부르며, 벡터 $\vec{u}$를 직선 g의 **방향벡터**라고 부른다.

> **한 점을 지나고 주어진 벡터에 평행한 직선의 방정식**
> 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{u}=(l, m, n)$에 평행한 직선의 방정식은
> $$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \quad (\text{단, } lmn\neq0)$$

서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$을 지나는 직선의 방향벡터는 $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$이고, 이 직선은 B를 지나므로 다음과 같은 직선의 방정식을 얻는다.

> **두 점을 지나는 직선의 방정식**
> 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$를 지나는 직선의 방정식은
> $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$
> (단, $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$, $z_1\neq z_2$)

예제 92. 두 점 $\mathrm{A}(1, 3, 2)$, $\mathrm{B}(5, 2, -3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 $\dfrac{x-1}{5-1}=\dfrac{y-3}{2-3}=\dfrac{z-2}{-3-2}$이므로 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{-5}$.

예제 93. 다음 두 직선이 이루는 각의 크기 θ를 구하여라.

$$\frac{x+1}{2}=y-2=z,\ x-1=\frac{y-2}{2}=3-z$$

풀이 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라고 하면

$$\vec{u_1}=(2, 1, 1),\ \vec{u_2}=(1, 2, -1)$$

이므로 두 직선이 이루는 각의 크기 θ에 대하여

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|2\times1+1\times2+1\times(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이다. □

> **두 직선의 평행과 수직**
> 두 직선 g_1, g_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}=(l_1, m_1, n_1)$, $\vec{u_2}=(l_2, m_2, n_2)$일 때,
> ① 두 직선 g_1, g_2가 평행하면
> $$\vec{u_1}\,/\!/\,\vec{u_2} \iff \vec{u_1}=k\vec{u_2}\ (\text{단, } k\neq0)$$
> $$\iff l_1 : m_1 : n_1=l_2 : m_2 : n_2$$
> ② 두 직선 g_1, g_2가 수직이면
> $$\vec{u_1}\perp\vec{u_2} \iff \vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0 \iff l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

예제 94. 다음 두 직선이 수직일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{k}=z,\ \frac{x+3}{k}=\frac{y+3}{k+2}=\frac{2-z}{5}$$

풀이 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라고 하면

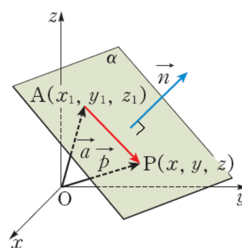
$$\vec{u_1}=(2, k, 1),\ \vec{u_2}=(k, k+2, -5)$$

주어진 두 직선이 수직이므로 $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$이다. 따라서

$$2\times k+k\times(k+2)+1\times(-5)=0$$

이고 이것을 풀면 $k=-5$ 또는 $k=1$이다. □

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y, z)$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$이므로



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0$$

이다. 이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$이므로

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0 \quad \cdots\cdots ①$$

이 성립한다.

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 평면 α 위에 있다. 따라서 ①은 점 A를 지나고 벡터 $\vec{n}$에 수직인 평면 α를 나타낸다.

이때 ①을 평면 α의 **벡터방정식**이라고 부르며, 벡터 $\vec{n}$을 평면 α의 **법선벡터**라고 부른다.

> **평면의 방정식**
> 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고, 벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$에 수직인 평면의 방정식은
> $$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

참고 일반적으로 평면의 방정식은 다음과 같이 $x,\ y,\ z$에 대한 일차방정식 $ax+by+cz+d=0$으로 나타낼 수 있다.

예제 95. 점 $(1,\ -2,\ 3)$을 지나고, 벡터 $\vec{n}=(-1,\ 1,\ 2)$에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

풀이 법선벡터가 $\vec{n}=(-1,\ 1,\ 2)$이므로 구하는 평면의 방정식은

$$-(x-1)+(y+2)+2(z-3)=0$$

즉 $x-y-2z+3=0$이다. □

예제 96. 점 $A(3,\ 1,\ -1)$을 지나고, 직선

$$x-4=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$$

에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 평면은 직선

$$x-4=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$$

에 수직이므로 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(1,\ 2,\ 3)$에 수직이다. 즉 벡터 $\vec{u}$는 평면의 법선벡터이다. 따라서 점 $A(3,\ 1,\ -1)$을 지나고, 법선벡터가 $(1,\ 2,\ 3)$인 평면의 방정식은

$$(x-3)+2(y-1)+3(z+1)=0$$

즉 $x+2y+3z-2=0$이다. □

예제 97. 세 점 $A(1,\ 1,\ 2)$, $B(-1,\ 1,\ 3)$, $C(2,\ 0,\ 1)$을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 평면의 방정식을

$$ax+by+cz+d=0 \quad \cdots\cdots ①$$

으로 놓으면 이 평면은 세 점 A, B, C를 지나므로

$$\begin{cases} a+b+2c+d=0 \\ -a+b+3c+d=0 \\ 2a+c+d=0 \end{cases}$$

위의 세 식을 연립하여 $b,\ c,\ d$를 a로 나타내면

$$b=-a,\ c=2a,\ d=-4a \quad \cdots\cdots ②$$

②를 ①에 대입하면

$$ax-ay+2az-4a=0 \quad \cdots\cdots ③$$

그런데 $a=0$이면 $b,\ c,\ d$가 모두 0이 되므로 $a\neq0$이다.
따라서 ③의 양변을 a로 나누어 정리하면 구하는 평면의 방정식은 $x-y+2z-4=0$이다. □

예제 98. 평면 $2x+3y-z=-5$와 직선

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{4}$$

의 교점의 좌표를 구하여라.

풀이 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{4}=t$로 놓으면

$$x=3t+1,\ y=-t-2,\ z=4t. \quad \cdots\cdots ①$$

①을 평면의 방정식에 대입하면

$$2(3t+1)+3(-t-2)-4t=-5.$$

이고 이것을 풀면 $t=1$이다. 이것을 ①에 대입하면

$$x=4,\ y=-3,\ z=4.$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(4,\ -3,\ 4)$이다. □

예제 99. 다음 두 평면이 이루는 각의 크기 θ를 구하여라.

$$2x-y-2z=-1,\ x+y-4z=-3$$

풀이 주어진 두 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1},\ \vec{n_2}$라고 하면

$$\vec{n_1}=(2,\ -1,\ -2),\ \vec{n_2}=(1,\ 1,\ -4)$$

이므로 두 평면이 이루는 각의 크기 θ에 대하여

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|2\times1+(-1)\times1+(-2)\times(-4)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이다. □

> **두 평면의 평행과 수직**
> 두 평면 $\alpha,\ \beta$의 법선벡터가 각각
> $$\vec{n_1}=(a_1,\ b_1,\ c_1),\ \vec{n_2}=(a_2,\ b_2,\ c_2)$$
> 일 때 다음이 성립한다.
> (1) 두 평면 $\alpha,\ \beta$가 평행하면
> $$\vec{n_1}\ /\!/\ \vec{n_2} \iff \vec{n_1}=k\vec{n_2}(k\neq0)$$
> $$\iff a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$$
> (2) 두 평면 $\alpha,\ \beta$가 수직이면
> $$\vec{n_1}\perp\vec{n_2} \iff \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0 \iff a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

예제 100. 다음 두 평면이 수직일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

$$(a-2)x-2y+z=3,\ 2x-(a+1)y+2z=1$$

풀이 주어진 두 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{n_1},\ \vec{n_2}$라고 하면

$$\vec{n_1}=(a-2,\ -2,\ 1),\ \vec{n_2}=(2,\ -a-1,\ 2)$$

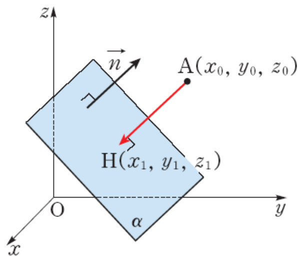
주어진 두 평면이 수직이므로 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$이다. 따라서

$$(a-2)\times2+(-2)\times(-a-1)+1\times2=0$$

이고 이것을 풀면 $a=0$이다. □

점과 평면 사이의 거리
점 $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

증명 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 $H(x_1,\ y_1,\ z_1)$이라고 하면 점 A와 평면 α 사이의 거리는 벡터 $\overrightarrow{AH}$의 크기와 같다.



이때 $\overrightarrow{AH}$는 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$와 평행하므로 $\overrightarrow{AH}=t\vec{n}$을 만족시키는 실수 t가 존재한다. 즉
$$(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)=t(a,\ b,\ c)$$
이므로
$$x_1=x_0+at,\ y_1=y_0+bt,\ z_1=z_0+ct \qquad \cdots (*)$$
이다. 그런데 점 H는 평면 α 위의 점이므로
$$ax_1+by_1+cz_1+d=0$$
이다. 여기에 (*)을 대입하면
$$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)+d=0$$
이므로
$$t=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$$
이다. 따라서 다음을 얻는다.
$$|\overrightarrow{AH}|=|t\vec{n}|=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ ■

예제 101. 점 $(2,\ 3,\ 0)$과 평면 $x+2y-2z+1=0$ 사이의 거리를 구하여라.

풀이 $\dfrac{|1\times2+2\times3-2\times0+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=3$ □

예제 102. 구 $x^2+(y-5)^2+(z-5)^2=25$가 평면
$$\alpha\ :\ 2x+2y+z-6=0$$
과 만나서 생기는 교선 위의 임의의 점과 원점을 연결한 직선으로 둘러싸인 도형의 내부의 부피를 구하여라.

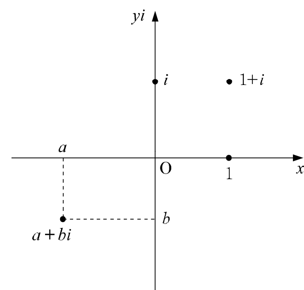
풀이 교선은 원이다. 구의 중심 $C(0,\ 5,\ 5)$에서 평면
$$\alpha\ :2x+2y+z-6=0$$
에 내린 수선의 발을 H라고 하면
$$\overline{CH}=\frac{|2\cdot0+2\cdot5+1\cdot5-6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3$$
이다. 구와 평면 α가 만나서 생기는 원 위의 반지름의 길이를
$$\overline{AH}=r$$
라고 하면
$$r^2=\overline{CA}^2-\overline{CH}^2=25-9=16$$
이므로 $r=4$이다.

한편 원점에서 평면 α에 내린 수선의 길이는
$$\frac{|-6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=2$$
이므로 구하는 도형은 반지름의 길이가 4인 원을 밑면으로 하고 높이가 2인 원뿔이다. 이 도형의 부피는
$$\frac{1}{3}\pi\cdot4^2\cdot2=\frac{32}{5}\pi.$$ □

16 복소평면

7차 교육과정부터 복소평면은 정규교육과정에서 제외되었다.

복소수는 실수부와 허수부를 갖고 있는데, 실수부를 x좌표, 허수부를 y좌표로 생각하여 좌표평면의 점으로 나타낼 수 있다. 즉 실수 $a,\ b$에 대하여 복소수
$z=a+bi$를 점 $(a,\ b)$로 나타내는 평면을 **복소평면**이라고 부른다.



복소평면의 가로축을 **실수축**, 세로축을 **허수축**이라고 부른다. 실수축의 이름은 x로 나타내고 허수축의 이름은 yi로 나타낸다.

예제 103. 다음 복소수가 복소평면에 나타내는 점의 좌표를 구하여라.

(1) $1+i$ (2) $i-\sqrt{2}$

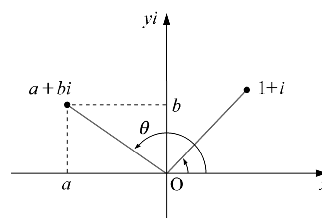
풀이 (1) $(1,\ 1)$ (2) $(-\sqrt{2},\ 1)$ □

복소수 $z=a+bi$가 복소평면의 원점으로부터 떨어진 거리를 z의 **절댓값**이라고 부르고 $|z|$로 나타낸다. 즉
$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

예제 104. 복소평면에서 $|z+1-i|=3$이 나타내는 도형이 어떤 도형인지 설명하여라.

풀이 $w=-1+i$라고 하면 w는 복소평면에서 점 $(-1,\ 1)$을 나타낸다. 이때 $|z-w|=3$은 w가 나타내는 점과 z가 나타내는 점의 거리가 3인 z들을 모아놓은 도형이다. 그런데 w는 복소평면에서 점 $(-1,\ 1)$이므로 $|z-w|=3$은 중심이 $(-1,\ 1)$이고 반지름이 3인 원이다. □

복소수 $z=a+bi$가 나타내는 점 P에 대하여 $\overline{OP}$를 동경으로 하고 실수축의 양의 방향을 시초선으로 하는 각을 z의 **편각**이라고 부른다.



예제 105. 다음 복소수의 편각을 구하여라.

(1) $-1+i$　　　　　(2) $-1-\sqrt{3}i$

풀이 (1) 점 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$에 대하여 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 각 중 하나는 $\frac{3}{4}\pi$이므로, 편각은 $2n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수) 이다.

(2) 점 $\mathrm{P}(-1,\ -\sqrt{3})$에 대하여 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 각 중 하나는 $\frac{4}{3}\pi$이므로, 편각은 $2n\pi+\frac{4}{3}\pi$ (n은 정수) 이다. □

복소수의 극형식

복소수 z의 절댓값이 $r=|z|$이고 편각이 θ일 때, z의 극형식은 다음과 같다.

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

참고 편각은 보통 $0\le\theta<2\pi$의 범위에 있는 것만 나타낸다.

예제 106. 다음 복소수를 극형식으로 나타내어라.

(1) $-1+i$　　　　　(2) $-1-\sqrt{3}i$

풀이 절댓값은 $|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$이고 편각은 $\frac{3}{4}\pi$이므로 극형식으로 나타내면

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

(2) 절댓값은 $|-1-\sqrt{3}i|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$이고 편각은 $\frac{4}{3}\pi$이므로 극형식으로 나타내면

$$-1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right).$$ □

예제 107. 복소평면에서 집합

$$\{z\,|\,z=2\cos\theta+2i\sin\theta,\ 0\le\theta\le\pi\}$$

가 나타내는 곡선의 길이를 구하여라.

풀이 $z=2\cos\theta+2i\sin\theta=2(\cos\theta+i\sin\theta)$는 절댓값이 2이고 편각이 θ인 점이다. 그런데 절댓값은 복소수가 나타내는 점이 원점으로부터 떨어진 거리를 나타낸다. 또한 문제에서 주어진 조건에 의하여 $0\le\theta\le\pi$이므로, 주어진 집합은 반지름이 2인 반원을 나타낸다. 따라서 이 도형의 길이는 2π이다. □

복소수의 곱의 극형식

복소수 z_1과 z_2의 극형식이

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\ z_2=r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)$$

일 때 곱 z_1z_2의 극형식은 다음과 같다.

$$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

참고 두 복소수를 곱할 때에는 절댓값끼리는 곱해주고 편각끼리는 더해주면 된다.

예제 108. 두 복소수 z_1과 z_2가 다음과 같이 주어져 있다.

$$z_1=2\left(\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi\right)\text{과 } z_2=3\left(\cos\frac{1}{4}\pi+i\sin\frac{1}{4}\pi\right)$$

이때 다음 계산 결과를 극형식으로 나타내어라.

(1) z_1z_2　　　(2) $(z_1)^2$　　　(3) $\frac{z_1}{z_2}$

풀이 (1) $z_1z_2=6\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$

(2) $(z_1)^2=4\left(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi\right)$

(3) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{3}\left\{\cos\left(-\frac{1}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{1}{12}\pi\right)\right\}$ □

드무아브르의 정리

복소수 z의 극형식이 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$일 때

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

예제 109. $z=1+\sqrt{3}i$일 때 z^{10}을 구하여라.

풀이 $|z|=2$이므로

$$z=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi\right)$$

이다. 따라서

$$z^{10}=2^{10}\left(\cos\frac{10}{3}\pi+i\sin\frac{10}{3}\pi\right)=1024\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

$$=1024(-1-\sqrt{3}i)=-1024-1024\sqrt{3}i$$

이다. □

예제 110. 복소평면에서 복소수 $4+2i$가 나타내는 점을 원점을 중심으로 60° 만큼 회전시킨 점을 나타내는 복소수를 구하여라.

풀이 $4+2i$가 나타내는 점은 $(4,\ 2)$이다. 그런데

$$\begin{pmatrix}\cos60^\circ & -\sin60^\circ\\ \sin60^\circ & \cos60^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}+1\end{pmatrix}$$

이므로 구하는 값은 $2-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)$이다.

다른 방법 절댓값이 1이고 편각이 60°인 복소수를 w라고 하면

$$w=\cos60^\circ+i\sin60^\circ=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

이다. $4+2i$에 w를 곱하면 절댓값은 변하지 않고 편각은 60°를 더해주어야 하므로, 이것은 결국 원점을 중심으로 60° 회전한 것이 된다. 따라서 구하는 값은

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4+2i)=2-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+1)$$

이다. □

예제 111. $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$일 때 $z+z^2+z^3+\cdots+z^{43}$의 값을 구하여라.

풀이 z의 거듭제곱을 차례로 구하면

$$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},$$

$$z^2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi,$$

$$z^3=\cos\frac{3}{3}\pi+i\sin\frac{3}{3}\pi=-1$$

이므로

$$z^4=(z^3)z=-z,$$

$$z^5=(z^2)z^3=-z^2,$$

$$z^6=(z^3)(z^3)=-z^3=1$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}z+z^2+z^3+\cdots+z^{43}&=(z+z^2+z^3+\cdots+z^{42})+z^{43}\\&=z^{43}=z^1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

이다. □

> **복소수의 제곱근**
> 복소수 w의 극형식이 $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$이고 $r>0$일 때 방정식 $z^n=w$의 해는
> $$z=\sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right\},$$
> $$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$$
> 이다.

예제 112. 복소수 범위에서 $z^{10}=1$의 해를 모두 구하여라.

풀이 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$라고 하면

$$z^{10}=r^{10}(\cos10\theta+i\sin10\theta)$$

이다. 그런데 $1=1(\cos0+i\sin0)$이므로 $r^{10}=1$이다. 이것을 만족시키는 양수 r는 1 뿐이므로 $r=1$이다. 즉

$$z^{10}=1^{10}(\cos10\theta+i\sin10\theta)=\cos10\theta+i\sin10\theta$$

이다. 한편 $z^{10}=1$의 편각은 0이므로 z의 편각은

$$\theta=0+2\pi\times\frac{k}{10}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$$

이다. 따라서 구하는 해는

$$z=\cos\frac{k\pi}{5}+i\sin\frac{k\pi}{5}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$$

이다. □

예제 113. 복소수 범위에서 $z^{10}=i$의 해를 모두 구하여라.

풀이 i의 절댓값은 1이고 편각은 $\frac{\pi}{2}$이므로 구하는 해는

$$z=\cos\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{20}\right)\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$$

이다. □

확률과 통계

Sooji Shin • soojishin@live.com

이 노트에서는 고등학교에서 배우는 수학의 내용 중 확률과 통계에 관련된 개념과 공식을 정리하고 그에 따른 예제와 풀이를 소개합니다. 필요한 경우 중학교 과정의 내용도 포함하고 있습니다. 이 노트에서 포함하고 있는 내용은 다음과 같습니다.

- 경우의 수
- 대푯값과 산포도
- 확률의 뜻과 성질
- 이산확률분포와 연속확률분포
- 이항분포와 정규분포
- 통계적 추정

이 노트가 수학을 공부하는 분들께 도움이 되기를 바랍니다.

1 순열과 조합

같은 조건에서 여러 번 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰을 **시행**이라고 부른다. 또한 어떤 시행에서 얻어지는 결과를 **사건**이라고 부른다. (통계학적으로는 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 경우의 집합을 S라고 할 때, S의 부분집합을 사건이라고 부른다.) 그리고 어떤 사건이 일어날 수 있는 가짓수를 **경우의 수**라고 부른다.

경우의 수의 합의 법칙 한 번의 시행에서 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않고 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이면, 한 번의 시행에서 사건 A 또는 사건 B가 일어날 경우의 수는 $m+n$이다.

참고 '사건 A'라고 할 때에 A는 사건 자체를 의미하기도 하고 동시에 사건의 집합을 의미하기도 한다. □

예제 1. 서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 6 또는 9가 되는 경우의 수를 구하여라.

풀이 두 개의 주사위를 던지므로 두 번의 시행처럼 보이지만, 그 합을 구하는 것이므로 결국 두 번 던지는 것을 묶어 한 번의 시행으로 보아야 한다.

눈의 수의 합이 6이 되는 경우와 9가 되는 경우는 동시에 존재할 수 없으므로 합의 법칙을 이용한다. 합이 6이 되는 경우는 5가지, 합이 9가 되는 경우는 4가지이므로 구하는 경우의 수는 $5+4=9$이다. □

참고 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우가 있는 경우 사건의 집합을 $C=A\cap B$, $A'=A-C$, $B'=B-C$으로 나눈다. 그러면 A 또는 B가 일어날 경우의 수는 A' 또는 B' 또는 C가 일어날 경우의 수가 된다. □

예제 2. 학생 수가 25명인 어느 학급에서 한 명의 학생에게 수학 문제를 풀게 하려고 한다. 1번부터 25번까지의 학생들 중에서 문제를 푸는 학생의 번호가 3의 배수 또는 4의 배수인 경우의 수를 구하여라.

풀이 3의 배수인 학생의 경우를 A, 4의 배수인 학생의 경우를 B라고 하자. 그러면 A와 B는 동시에 일어날 수도 있으므로 합의 법칙을 그냥 사용할 수가 없다. 이때 $C=A\cap B$라고 하고 [즉, C는 3의 배수이면서 4의 배수인 사건이다.] $A'=A-C$, $B'=B-C$라고 하자.

그러면 A'은 3의 배수이면서 12의 배수가 아닌 경우이므로 A'이 일어날 경우의 수는 $8-2=6$이다. 같은 방법으로 B'이 일어날 경우의 수는 $6-2=4$이다. 또한 C가 일어날 경우의 수는 2이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $6+4+2=12$이다. □

예제 3. 음이 아닌 정수 x, y에 대하여 $x+y\le 6$을 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

해설 $x+y=k$라고 하고 $k=0$, 1, 2, 3, 4, 5인 각 경우에 대하여 경우의 수를 구한 뒤 더한다. □

경우의 수의 곱의 법칙 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 번의 시행에서 두 사건 A, B가 연속으로 이어서 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

예제 4. 다음 수의 양의 약수의 개수를 구하여라.

(1) 108 (2) 360

풀이 (1) $108=2^2\times 3^3$이다. 따라서 108의 약수는

$$2^m\times 3^n$$

의 꼴이고 m과 n은 각각 $0\le m\le 2$, $0\le n\le 3$인 정수이다. 이때 m을 택할 수 있는 경우의 수는 3, n을 택할 수 있는 경우의 수는 4이므로, m과 n을 동시에 택할 수 있는 경우의 수는 $3\times 4=12$이다. 따라서 약수의 개수는 12개다.

(2) $360=2^3\times 3^2\times 5^1$이므로 약수의 개수는 $4\times 3\times 2=24$. □

예제 5. 식 $(a+b)(p+q)(x+y+z)$를 전개하였을 때, 항의 개수를 구하여라.

풀이 $2\times 2\times 3=12$. □

1부터 n까지의 자연수를 차례로 곱한 것을 n의 **계승** 또는 **차례곱**이라고 부르며 $n!$로 표기하고 'n 팩토리얼'이라고 읽는다. 예컨대

$$5!=1\times 2\times 3\times 4\times 5=120$$

이다. 특히 $0!=1$로 정의한다.

순열의 계산

서로 다른 n개의 물건 중 r개를 택하여 일렬로 나열하는 **순열**의 수는

$$_nP_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

참고 순열의 정의에 의하여 $_nP_n=n!$, $_nP_0=1$이 성립한다.

예제 **6.** 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 세 개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수를 구하여라.

풀이 5개 중 3개를 택하여 일렬로 나열하는 순열이므로, 구하는 자연수의 개수는 $_5P_3=5\times4\times3=60$개다. □

예제 **7.** 할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 두 딸로 구성된 6명의 가족이 박물관에 입장하려고 한다. 한 줄로 입장한다고 할 때, 다음에 답하여라.

(1) 두 딸이 연이어 입장하지 않는 방법의 수를 구하여라.

(2) 맨 앞과 맨 뒤에 여자가 입장하는 방법의 수를 구하여라.

풀이 고려해야 할 조건이 여러 가지인 경우 경우의 수를 계산하기 쉽도록 조건의 고려 순서를 정한다.

(1) 두 딸이 연이어 입장하지 않으려면 다른 사람들을 먼저 세우고 양 끝 및 사이사이 중 2자리를 택하여 딸 둘을 세우면 된다. 딸 둘을 제외한 나머지 식구 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 4!, 딸 둘을 일렬로 세우는 방법의 수는 $_5P_2$이다. 따라서 구하는 방법의 수는 $4!\times{}_5P_2=24\times20=480$이다.

(2) 맨 앞과 맨 뒤에 여자를 세우는 방법은 여자 4명 중 2명을 뽑아 일렬로 세우는 방법이므로 $_4P_2$, 가운데 네 자리에 나머지 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 4!이다. 따라서 구하는 방법의 수는 $_4P_2\times4!=12\times24=288$이다. □

예제 **8.** 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $_nP_r=n\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$ (단, $1<r\le n$)

(2) $_nP_r={}_{n-1}P_r+r\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$ (단, $1<r<n$)

풀이 순열의 정의를 이용한다.

(1) $n\cdot{}_{n-1}P_{r-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}=\dfrac{n!}{(n-r)!}={}_nP_r$

(2) $_{n-1}P_r+r\cdot{}_{n-1}P_{r-1}=\dfrac{(n-1)!}{(n-1-r)!}+\dfrac{r\cdot(n-1)!}{(n-1-r+1)!}$

$=\dfrac{(n-r)\cdot(n-1)!}{(n-r)!}+\dfrac{r\cdot(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-r+r)\cdot(n-1)!}{(n-r)!}=\dfrac{n!}{(n-r)!}={}_nP_r.$ □

조합의 계산

서로 다른 n개의 물건 중 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 **조합**의 수는

$$_nC_r=\frac{_nP_r}{r!}=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{개}}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

참고 순열은 택할 때 순서가 다르면 서로 다른 것이라고 생각하지만, 조합은 택할 때 순서가 중요하지 않다. □

예제 **9.** 다음을 구하여라.

(1) 30명의 학생 중에서 임원 2명을 뽑는 방법의 수

(2) 12명의 배구 선수 중에서 6명을 뽑아 선발 선수로 출전시킬 때, 특정한 두 선수를 포함하여 뽑는 방법의 수

풀이 (1) 30명 중 순서를 고려하지 않고 2명을 뽑으므로

$$_{30}C_2=\frac{30\times29}{2}=435.$$

(2) 두 선수가 이미 정해졌으므로 10명 중 4명을 뽑는 방법의 수는 $_{10}C_4=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210.$ □

예제 **10.** 주머니 속에 크기가 서로 다른 4개의 빨간 공과 6개의 노란 공이 들어 있다. 다음을 구하여라.

(1) 주머니에서 3개의 공을 뽑는 경우의 수

(2) 주머니에서 빨간 공 1개와 노란 공 2개를 뽑는 경우의 수

풀이 (1) 서로 다른 10개의 공 중 3개의 공을 뽑으므로

$$_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120.$$

(2) 4개의 빨간 공에서 1개의 공을 뽑는 경우의 수는 $_4C_1$이고 6개의 노란 공에서 2개의 공을 뽑는 경우의 수는 $_6C_2$이므로 구하는 경우의 수는 $_4C_1\times{}_6C_2=4\times15=60.$ □

예제 **11.** 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ (단, $1\le r<n$)

(2) $r\cdot{}_nC_r=n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$ (단, $1\le r\le n$)

풀이 (1) $_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(n-1-r)!\,r!}+\dfrac{(n-1)!}{(n-1-r+1)!\,(r-1)!}$

$=\dfrac{(n-r)\cdot(n-1)!}{(n-r)!\,r!}+\dfrac{(n-1)!\cdot r}{(n-r)!\,r!}$

$=\dfrac{(n-r+r)\cdot(n-1)!}{(n-r)!\,r!}=\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}={}_nC_r.$

(2) $n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(n-1-r+1)!\,(r-1)!}$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!\,(r-1)!}=r\cdot\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}=r\cdot{}_nC_r.$ □

참고 조합이 도형에 응용되는 예

- 임의의 세 점이 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점에서 두 점을 이어 만든 직선의 개수 : ${}_nC_2$
- 임의의 세 점이 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점에서 세 점을 이어 만든 삼각형의 개수 : ${}_nC_3$
- m개의 평행선과 n개의 평행선이 만날 때 생기는 평행사변형의 개수 : ${}_mC_2 \times {}_nC_2$ □

참고 이 외에 자주 사용되는 순열에는 다음과 같은 것들이 있다.

(1) 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 **원순열** : $(n-1)!$

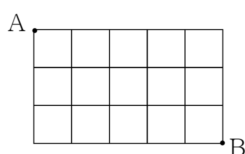
(2) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 **중복순열** : ${}_n\prod_r = n^r$

(3) n개에서 서로 같은 것이 각각 $p_1, p_2, \cdots, p_k$개씩 있을 때, 이들을 모두 택하여 일렬로 나열하는 순열 :

$$\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_k!} \quad (\text{단, } p_1+p_2+\cdots+p_k=n)$$ □

보기 **12.** 7개의 문자 a, a, a, b, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3!\times 4!}=35$이다. □

예제 **13.** 오른쪽 그림에서 점 A에서 출발하여 선을 따라 점 B에 이르는 최단경로의 수를 구하여라.



풀이 A에서 출발하여 B에 이르는 최단경로는 8번을 이동하되 5번은 오른쪽으로, 3번은 아래로 이동하는 것이다.

8번의 이동 중 아래로 이동하는 3번을 뽑는 경우의 수와 같다. 따라서 구하는 경우의 수는

$${}_8C_3 = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

이다. 참고로, 8번의 이동 중 아래로 이동하는 5번을 뽑는 경우의 수와 같다고 생각하여 ${}_8C_5$로 계산하여도 된다. □

참고 위와 같은 문제에서 가로 m칸, 세로 n칸일 때, 최단거리로 이동하는 경우의 수는 $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$이다. □

> **조합의 성질**
> r와 n이 0 이상인 정수일 때 다음이 성립한다.
> (1) ${}_nC_n=1$, ${}_nC_0=1$
> (2) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)
> (3) ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ (단, $1\le r\le n-1$)

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 **중복조합**이라고 부르며

$${}_nH_r$$

로 나타낸다.

> **중복조합의 계산**
> 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수
> $${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$$

예제 **14.** 다음을 구하여라.

(1) 10명의 학생 중에서 회장 1명, 부회장 1명을 택하는 경우의 수

(2) 12명의 수영 선수 중에서 시합에 나갈 3명의 선수를 선발하는 경우의 수

(3) 4개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허락하여 7개의 문자를 택하는 경우의 수

(4) 1부터 8까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 5개의 숫자를 택하는 경우의 수

풀이 (1) ${}_{10}P_2=10\cdot9=90$.

(2) ${}_{12}C_3=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220$.

(3) 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120.$$

(4) 서로 다른 8개에서 5개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_{8+5-1}C_5={}_{12}C_5=792.$$ □

예제 **15.** 방정식 $x+y+z=9$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 음이 아닌 정수해 (x, y, z)의 개수

(2) 양의 정수해 (x, y, z)의 개수

풀이 (1) 음이 아닌 정수해의 개수는 x, y, z의 3개의 문자에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55.$$

(2) $x-1=a$, $y-1=b$, $z-1=c$로 치환하면

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)=9$$

이므로 $a+b+c=6$이다. 이 방정식의 음이 아닌 정수해 (a, b, c)의 개수를 구하면 ${}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$. □

예제 **16.** 두 집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 $i\in A$, $j\in A$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $i<j \Rightarrow f(i)<f(j)$를 만족시키는 함수 $f : A\to B$의 개수

(2) $i<j \Rightarrow g(i)\le g(j)$를 만족시키는 함수 $g : A\to B$의 개수

풀이 (1) 주어진 조건을 만족시키려면 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 3개를 택한 후 작은 수부터 차례로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

즉 함수 f의 개수는 공역의 원소 5개 중에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_5C_3=10$.

(2) 주어진 조건을 만족시키려면 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 작은 수부터 차례로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

즉 함수 g의 개수는 공역의 원소 5개 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$. □

예제 17. $(x+y+z)^4$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

풀이 주어진 식은

$$(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$$

이므로 $(x+y+z)^4$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항은

$$x^4,\ x^3y,\ x^3z,\ \cdots,\ xyz^2,\ \cdots,\ z^4$$

등으로 모두 4차항이다. 따라서 구하는 항의 개수는 3개의 문자 $x,\ y,\ z$ 중 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_4 = {}_{3+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = 15.$$ □

주어진 집합을 공집합이 아닌 몇 개의 서로소인 부분집합으로 나누는 것을 **집합의 분할**이라고 부른다. 또한 원소의 개수가 n인 집합을 k개의 집합으로 분할하는 방법의 수를 기호로

$$\boldsymbol{S(n,\ k)}$$

로 나타낸다.

예제 18. $S(4,\ 2)$의 값을 구하여라.

풀이 원소의 개수가 1, 3인 두 개의 집합으로 분할하는 경우, 4개의 원소 중 1개를 택하여 하나의 집합을 만들고, 남은 3개의 원소 중 3개를 택하여 다른 한 집합을 만들면 되므로 그 경우의 수는 다음과 같다.

$${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_3 = 4 \times 1 = 4$$

원소의 개수가 2, 2인 두 개의 집합으로 분할하는 경우, 4개의 원소 중 2개를 택하여 하나의 집합을 만들고 남은 2개의 원소 중 2개를 택하여 다른 한 집합을 만든다. 그런데 두 집합의 원소의 개수가 같은 경우에는 중복되는 경우가 2!개씩 나타나므로 그 경우의 수는 다음과 같다.

$${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 \times \frac{1}{2!} = \frac{4\times3}{2\times1} \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

따라서 $S(4,\ 2) = 4+3 = 7$이다. □

예제 19. 서로 다른 종류의 꽃 5송이를 두 묶음으로 나누는 방법의 수를 구하여라.

풀이 5송이에서 1송이를 택하고, 남은 4송이에서 4송이를 택하여 두 묶음으로 나누는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_4 = 5 \times 1 = 5$.

5송이에서 2송이를 택하고, 남은 3송이에서 3송이를 택하여 두 묶음으로 나누는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_3 = 10 \times 1 = 10$.

따라서 구하는 방법의 수는 $S(5,\ 2) = 5+10 = 15$. □

참고 일반적으로 원소의 개수가 n인 집합을 서로소인 k개의 집합으로 분할하는 방법의 수 $S(n,\ k)$는 $(n-1)$개의 원소를 서로소인 $(k-1)$개의 집합으로 나누고 특별한 원소를 하나의 집합으로 만드는 방법의 수가 $S(n-1,\ k-1)$이고, 특정한 한 개의 원소를 제외한 $(n-1)$개의 원소를 서로소인 k개의 집합으로 나눈 후 특정한 원소를 포함시키는 방법의 수가 $k \times S(n-1,\ k)$이므로 다음을 얻는다.

$$S(n,\ k) = S(n-1,\ k-1) + k \times S(n-1,\ k)$$ □

자연수 n을 다음과 같이 나타내는 것을 **자연수의 분할**이라고 부른다.

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \quad (\text{단, } n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1)$$

한편 자연수 n을 k개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 수를 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\boldsymbol{P(n,\ k)}$$

예제 20. $P(6,\ 3)$의 값을 구하여라.

풀이 자연수 6을 3개의 자연수의 합으로 나타내면

$$6 = 4+1+1 = 3+2+1 = 2+2+2$$

이므로 $P(6,\ 3) = 3$이다. □

예제 21. 같은 종류의 사탕 7개를 같은 종류의 봉지 3개에 빈 봉지가 없도록 넣는 방법의 수를 구하여라.

풀이 $7 = 5+1+1 = 4+2+1 = 3+3+1 = 3+2+2$이므로 $P(7,\ 3) = 4$이다. 따라서 같은 종류의 사탕 7개를 같은 종류의 봉지 3개에 빈 봉지가 없도록 넣는 방법의 수는 4이다.

다른 풀이 빈 봉지가 없도록 넣어야 하므로 모든 봉지에 사탕을 하나씩 넣는다. 이때 구하는 방법의 수는 남은 4개의 사탕을 3개의 봉지에 분할하여 넣는 방법의 수와 같다.

$P(4,\ 1) = 1$
$4 = 3+1 = 2+2$에서 $P(4,\ 2) = 2$
$4 = 2+1+1$에서 $P(4,\ 3) = 1$

따라수 구하는 방법의 수는

$$P(4,\ 1) + P(4,\ 2) + P(4,\ 3) = 1+2+1 = 4.$$ □

이항정리
$ab \neq 0$이고 n이 자연수일 때

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, a^{n-r}\, b^r$$

예제 22. 다음을 구하여라.

(1) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항과 x^2의 계수

(2) $(a-2b^2)^9$의 전개식에서 a^6b^6의 계수

풀이 (1) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_6\mathrm{C}_r 2^r x^{6-2r}.$$

상수항은 $6-2r=0$일 때이므로 $r=3$. 따라서 상수항은

$${}_6\mathrm{C}_3 2^3 = 20 \cdot 8 = 160.$$

이차항은 $6-2r=2$일 때이므로 $r=2$. 따라서 이차항의 계수는

$${}_6\mathrm{C}_2 2^2 = 15 \cdot 4 = 60.$$

(2) $(a-2b^2)^9$의 전개식의 일반항은

$${}_9\mathrm{C}_r a^{9-r}(-2b^2)^r = {}_9\mathrm{C}_r (-2)^r a^{9-r} b^{2r}$$

이다. a^6b^6 항은 $9-r=6$일 때이므로 $r=3$. 따라서 a^6b^6의 계수는 ${}_9\mathrm{C}_3(-2)^3 = 84 \cdot (-8) = -672$. □

이항계수의 성질

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

(2) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-+\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

(3) ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots=2^{n-1}$

(4) ${}_nC_1+2\cdot{}_nC_2+3\cdot{}_nC_3+\cdots+n\cdot{}_nC_n=n\cdot 2^{n-1}$

예제 23. 다음 값을 구하여라.

(1) ${}_5C_0-{}_5C_1+{}_5C_2-{}_5C_3+{}_5C_4-{}_5C_5$

(2) ${}_6C_0+{}_6C_2+{}_6C_4+{}_6C_6$

풀이 (1) 0 (2) 32 □

2 대푯값과 산포도

수로 나타난 자료가 있을 때, 자료 전체의 중심적인 경향이나 특성을 하나의 수로 나타내어 자료 전체를 대표하는 값을 **대푯값**이라고 부른다. [대푯값으로는 평균, 중앙값, 최빈값 등이 있다.] 또한 자료 전체가 대푯값을 중심으로 흩어져 있는 정도를 **산포도**라고 부른다. [산포도에는 평균편차, 표준편차 등이 있다.]

평균, 분산, 표준편차

n개의 자료 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$에 대하여

① 평균 : $m=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

② 분산 : $V=\dfrac{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2}{n}$

③ 표준편차 : $\sigma=\sqrt{V}$

참고 평균과 표준편차는 자료(변량)의 단위와 동일한 단위를 사용한다. 그러나 분산은 제곱을 하였기 때문에 단위를 사용하지 않는다.

예제 24. 다음 자료는 달걀 10개의 무게를 재서 얻은 것이다. 달걀 무게의 평균, 분산, 표준편차를 구하여라. (단위 g)

59	61	48	59	58	60	53	65	60	57

풀이 정의를 이용하여 계산하면 다음과 같다.

$$(\text{평균})=\frac{59+61+48+59+58+60+53+65+60+57}{10}=58(\text{g})$$

$$(\text{분산})=\frac{(59-58)^2+(61-58)^2+(48-58)^2+\cdots+(57-58)^2}{10}$$

$$=\frac{1^2+3^2+(-10)^2+\cdots+(-1)^2}{10}=19.4$$

$$(\text{표준편차})=\sqrt{(\text{분산})}\fallingdotseq 4.40(\text{g})$$ □

참고 변량 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$의 평균이 m일 때, 분산 V는 다음과 같은 공식으로도 구할 수 있다.

$$V=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}{n}-m^2$$ □

예제 25. 다음 자료에서 분산을 구하여라.

(1) 1, 3, 5, 7, 9

(2) 101, 103, 105, 107, 109

풀이 (1) 평균이 5임은 한눈에 알 수 있다.

분산은 $V=\dfrac{1^2+3^2+5^2+7^2+9^2}{5}-5^2=33-25=8$이다.

(2) 자료가 흩어진 정도가 (1)과 같으므로 분산은 8이다. □

도수분포표에서의 평균과 분산

계급값 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$의 도수가 순서대로 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n$이고 도수의 총 합이 N일 때

① $m=\dfrac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n}{N}$

② $V=\dfrac{(x_1-m)^2f_1+(x_2-m)^2f_2+\cdots+(x_n-m)^2f_n}{N}$

예제 26. 다음은 어느 고등학교 1학년 학생 50명의 키를 조사한 도수분포표이다.

계급(cm)	도수(명)	계급(cm)	도수(명)
이상 미만 155 ~ 160	2	이상 미만 170 ~ 175	21
160 ~ 165	4	175 ~ 180	8
165 ~ 170	13	180 ~ 185	2
		합 계	50

이 학생들의 키의 평균, 분산, 표준편차를 구하여라.

풀이 표를 만들면 다음과 같다.

계급값	도수	(계급값)×(도수)	{(계급값)-(평균)}^{2}×(도수)
157.5	2	315	364.5
162.5	4	650	289
167.5	13	2177.5	159.25
172.5	21	3622.5	47.25
177.5	8	1420	338
182.5	2	365	264.5
합계	50	8550	1462.5

따라서 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$(\text{평균})=\dfrac{8550}{50}=171\ (\text{cm})$

$(\text{분산})=\dfrac{1462.5}{50}=29.25$

$(\text{표준편차})=\sqrt{29.25}\fallingdotseq 5.41\ (\text{cm})$ □

참고 대푯값에는 다음과 같은 것들도 있다.

(1) **중앙값** : 변량을 작은 것부터 큰 것 순으로 나열했을 때 중앙에 위치하는 값. 단 변량의 개수가 짝수인 경우에는 중앙에 있는 두 값의 중간값을 구한다.

(2) **최빈값** : 변량 중에서 가장 많이 등장하는 값.
예를 들어 자료 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5에 대하여 중앙값은 2와 3의 중간값인 2.5이고, 최빈값은 2이다. □

참고 산포도에는 다음과 같은 것도 있다.

$$(\text{평균편차})=\frac{|x_1-m|+|x_2-m|+\cdots+|x_n-m|}{n}$$

평균편차는 절댓값 때문에 수리적 전개가 어려워 실제로 많이 사용되지 않는다. □

3 확률의 뜻과 기본 성질

같은 조건에서 여러 번 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 결정되는 실험이나 관찰을 **시행**이라고 부른다.

어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 가능한 결과의 집합을 **표본공간**이라고 부른다. 어떤 시행에서 얻어지는 결과를 **사건**이라고 부른다. 즉 사건이란 표본공간의 부분집합이다.

표본공간의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 사건을 **근원사건**이라고 부른다. 반드시 일어나는 사건을 **전사건**이라고 부른다. 즉 전사건이란 표본공간 자신의 집합이다. 절대로 일어나지 않는 사건을 **공사건**이라고 부른다. 공사건을 $\varnothing$으로 나타낸다.

예제 27. 서로 다른 두 개의 동전을 던지는 시행에서 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내고, 시행의 결과를 (H, T)와 같이 순서쌍으로 나타내기로 할 때 다음을 구하여라.

(1) 표본공간 S
(2) 서로 다른 면이 나오는 사건 A
(3) 모두 앞면이 나오는 사건 B
(4) 뒷면이 적어도 한 번 나오는 사건 C

풀이 (1) $S=\{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H}),(\mathrm{T},\mathrm{T})\}$
(2) $A=\{(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H})\}$
(3) $B=\{(\mathrm{H},\mathrm{H})\}$
(4) $C=\{(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H}),(\mathrm{T},\mathrm{T})\}$ □

표본공간 S의 임의의 두 사건 A, B가 주어졌다고 하자.

A 또는 B가 일어나는 사건을 A와 B의 **합사건**이라고 부르고 $A\cup B$로 나타낸다.

A와 B가 동시에 일어나는 사건을 A와 B의 **곱사건**이라고 부르고 $A\cap B$로 나타낸다.

A와 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉 A와 B가 서로소일 때 A와 B를 서로 **배반**이라고 하고, 서로 배반인 두 사건을 **배반사건**이라고 부른다.

A가 일어나지 않는 사건을 A의 **여사건**이라고 부르고 A^c로 나타낸다.

예제 28. 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 3 이상의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. 이때 다음을 구하여라.

(1) A와 B의 합사건 (2) A와 B의 곱사건
(3) A의 여사건 (4) A와 배반사건의 개수

풀이 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$
(1) $A\cup B=\{1, 3, 4, 5, 6\}$
(2) $A\cap B=\{3, 5\}$
(3) $A^c=\{2, 4, 6\}$
(4) A와 배반사건이려면 A와 서로소가 되어야 한다. A와 서로소가 되려면 A^c의 부분집합이면 된다. 그런데 A^c의 원소의 개수가 3이므로 A^c의 부분집합의 개수는 $2^3=8$이다. 따라서 구하는 사건의 개수는 8이다. □

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 A가 일어날 **확률**이라고 부르고 $\mathrm{P}(A)$로 나타낸다. 보통 확률은 수학적 확률, 통계적 확률, 기하적 확률로 나눈다.

> **수학적 확률**
> 어떤 시행에서 표본공간 S가 m개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률은
> $$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{m}$$
> 이다.

예제 29. 1부터 6까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 6장의 카드를 일렬로 나열할 때, 다음을 구하여라.

(1) 1, 2, 3이 적힌 3장의 카드가 이웃할 확률
(2) 3이 적인 카드와 4가 적힌 카드가 양 끝에 올 확률

풀이 6장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!=720$.

(1) 1, 2, 3이 적힌 3장의 카드를 한 묶음으로 생각하여 4장의 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$이다. 이때 1, 2, 3이 적힌 3장의 카드가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는 $24\cdot 6=144$이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{144}{720}=\frac{1}{5}.$$

(2) 3과 4가 적힌 카드를 제외한 나머지 4장의 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$이다. 이때 3과 4가 적힌 카드가 양 끝에서 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 2이다. 따라서 3과 4가 적힌 카드가 양 끝에 오는 방법의 수는 $24\cdot 2=48$이다. 이로써 구하는 확률은

$$\frac{48}{720}=\frac{1}{15}.$$ □

예제 30. 하양 공 5개, 빨강 공 3개, 검정 공 2개가 들어 있는 상자에서 3개의 공을 꺼낼 때, 다음을 구하여라.

(1) 꺼낸 공이 모두 하양 공일 확률
(2) 꺼낸 공이 빨강 공 2개, 검정 공 1개일 확률
(3) 꺼낸 공 중 하양 공이 2개일 확률

풀이 10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 방법의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3=129$이다.

(1) 하얀 공 5개 중에서 3개를 꺼내는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{10}{120}=\frac{1}{12}.$$

(2) 빨강 공 3개 중에서 2개, 검정 공 2개 중에서 1개를 꺼내는 방법의 수는 ${}_3C_2\cdot{}_2C_1=6$이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{120}=\frac{1}{20}.$$

(3) 하얀 공 5개 중에서 2개, 나머지 5개의 공 중에서 1개를 꺼내는 방법의 수는 ${}_5C_2\cdot{}_5C_1=50$이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{50}{120}=\frac{5}{12}.$$

□

통계적 확률

같은 시행을 n번 반복하여 사건 A가 일어날 횟수를 r_n이라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{n}=p.$$

이때 p를 사건 A의 **통계적 확률**이라고 부른다.

참고 실제 통계에서는 시행을 무한히 여러 번 반복할 수 없으므로 주어진 자료의 양이 충분히 많으면 통계적 확률의 근거 자료로 사용한다. 통계적 확률은 자료의 양이 많을수록 신뢰도가 높아진다. □

예제 31. 오른쪽 표는 실험용 쥐 100마리에게 담배 연기 농축물을 매일 일정량씩 투여하였을 때, 농축물을 투여한 기간에 따라 생존한 쥐의 수를 나타낸 것이다. 이때 농축물을 투여한 후 11일 동안 생존한 쥐가 앞으로 3일 이내에 사망할 확률을 구하여라.

기간(일)	생존한 쥐의 수(마리)
10	80
11	60
12	48
13	36
14	20
15	12

풀이 농축물을 투여하기 시작한 후 11일 동안 생존한 쥐는 60마리이고, 3일 후인 14일 동안 생존한 쥐는 20마리이므로 11일로부터 3일 이내에 사망한 쥐는 40마리이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$이다. □

예제 32. 주머니 안에 하얀 구슬과 검정 구슬을 합하여 10개의 구슬이 들어 있다. 이 주머니에서 3개의 구슬을 동시에 꺼내어 색깔을 확인하고 다시 넣는 시행을 여러 번 반복하였더니 6번에 1번 꼴로 3개 모두 하얀 구슬이었다. 이때 이 주머니 안에 들어 있는 하얀 구슬의 개수는 몇 개인 것으로 기대할 수 있는지 구하여라.

풀이 10개의 구슬 중 3개를 꺼내는 방법의 수는 ${}_{10}C_3=120$. 주머니 안의 하얀 구슬의 개수를 n이라 하면, n개의 구슬 중 3개의 하얀 구슬을 꺼내는 방법의 수는 다음과 같다.

$${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

따라서 10개의 구슬 중 3개의 구슬을 꺼낼 때 모두 하얀 구슬일 확률은

$$\frac{{}_nC_3}{{}_{10}C_3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{720}$$

이다. 이 시행에서 6번에 1번 꼴로 3개 모두 하얀 구슬을 꺼냈으므로

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{720}=\frac{1}{6}$$

이다. 이것을 풀면 $n=6$을 얻는다.

그러므로 이 주머니 안에는 6개의 하얀 구슬이 들어 있을 것으로 기대할 수 있다. □

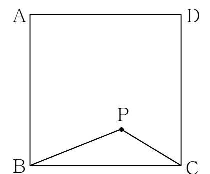
기하학적 확률

연속적인 변량을 크기로 갖는 표본공간의 영역 S 안에서 각각의 점을 잡을 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 영역 S에 포함되어 있는 영역 A에 대하여 영역 S에서 임의로 잡은 점이 영역 A에 속할 확률은

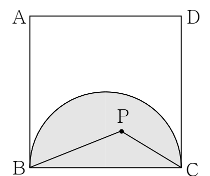
$$\mathrm{P}(A)=\frac{(\text{영역 } A\text{의 크기})}{(\text{영역 } S\text{의 크기})}$$

이다.

예제 33. 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD가 있다. 사각형 ABCD 내부에 한 점 P를 잡을 때, 삼각형 PBC가 둔각삼각형이 될 확률을 구하여라.



풀이 정사각형의 한 변의 길이를 a라고 하자. 그러면 정사각형의 넓이는 a^2이다. 선분 BC를 지름으로 하는 반원에서 점 P가 $\overset{\frown}{BC}$ 위에 있을 때 $\triangle PBC$는 직각삼각형이므로 이 반원의 내부에 점 P를 잡으면 $\triangle PBC$는 둔각삼각형이 된다. 이때 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{8}$$

이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square ABCD\text{의 넓이})}=\frac{\pi}{8}.$$

□

확률의 성질

(1) 기본성질

① 임의의 사건 A에 대하여 $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$

② 전사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=1$

③ 공사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

(2) 확률의 덧셈정리

① 두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어날 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

② 특히 두 사건 A, B가 배반사건이면
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

(3) 여사건의 확률 : $\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)$.

확률의 성질의 증명 A, B가 표본공간을 S의 두 부분집합이라고 하자.

(1) ① $0 \le n(A) \le n(S)$이므로 $0 \le \dfrac{n(A)}{n(S)} \le 1$.

② $\mathrm{P}(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} = 1$

③ $\mathrm{P}(\varnothing) = \dfrac{n(\varnothing)}{n(S)} = \dfrac{0}{n(S)} = 0$.

(2) ① $\mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(S)}$

$= \dfrac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)}$

$= \dfrac{n(A)}{n(S)} + \dfrac{n(B)}{n(S)} - \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)}$

$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

② $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(\varnothing) = 0$이므로

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

(3) $\mathrm{P}(A^c) = \mathrm{P}(S - A) = \dfrac{n(S-A)}{n(S)}$

$= \dfrac{n(S) - n(A)}{n(S)} = 1 - \dfrac{n(A)}{n(S)} = 1 - \mathrm{P}(A)$. ■

예제 34. 1부터 20까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 20개의 구슬 중에서 한 개를 뽑을 때, 3 또는 4의 배수가 적힌 구슬이 나올 확률을 구하여라.

풀이 구슬에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 구슬에 적힌 수가 4의 배수인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A) = \frac{6}{20},\ \mathrm{P}(B) = \frac{5}{20},\ \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} - \frac{1}{20} = \frac{1}{2}.$$ □

예제 35. 수학경시대회에 출전할 학교 대표 2명을 선발하는 시험에 2학년 학생이 5명, 3학년 학생이 7명 참가하였다. 이때 대표로 뽑힌 두 학생이 모두 같은 학년일 확률을 구하여라.

풀이 12명의 학생 중 2명을 대표로 뽑는 경우의 수는

$${}_{12}\mathrm{C}_2 = 66$$

이다. 한편 대표로 뽑힌 두 학생이 모두 2학년인 사건과 모두 3학년인 사건은 동시에 일어날 수 없으므로 배반사건이다. 2명의 대표가 모두 2학년인 사건을 A라고 하고, 모두 3학년인 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A) = \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2} = \frac{10}{66},\ \mathrm{P}(B) = \frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2} = \frac{21}{66}.$$

그런데 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{10}{66} + \frac{21}{66} = \frac{31}{66}.$$ □

참고 사건 A의 여사건이 B일 때 A와 B는 서로 배반사건이다. 왜냐하면 $B = A^c$일 때

$$A \cap B = A \cap A^c = \varnothing$$

이기 때문이다. 그러나 역은 성립하지 않는다. 즉 두 사건 A, B가 서로 배반사건일지라도 B는 A의 여사건이 아닐 수도 있다.

예제 36. 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 곱이 짝수일 확률을 구하여라.

풀이 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A라고 하면 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건은 A^c이고

$$\mathrm{P}(A^c) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$ □

'적어도 ~인 사건', '~ 이상인 사건', '~ 이하인 사건', '~가 아닌 사건'을 구할 때 여사건을 사용하면 편리하다.

예제 37. 1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 10장의 카드에서 3장의 카드를 택할 때, 적어도 한 장의 카드에 적힌 수가 소수일 확률을 구하여라.

풀이 3장의 카드 모두 소수가 아닌 사건의 여사건을 이용하자. 10장의 카드 중에서 3장의 카드를 택하는 방법의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_3 = 120$$

이다. 적어도 한 장의 카드에 적힌 수가 소수인 사건을 A라고 하면 3장의 카드에 적힌 수가 모두 소수가 아닌 사건은 A^c이다.

1부터 10까지의 자연수 중에서 소수의 개수는 2, 3, 5, 7로서 4개이므로 소수가 아닌 자연수의 개수는 6이다. 따라서 3장의 카드를 택할 때 3장의 카드에 적힌 수가 모두 소수가 아닐 확률은

$$\mathrm{P}(A^c) = \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{1}{6}$$

이다. 그러므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$ □

4 사건의 독립과 종속

어떠한 사건이 일어났다는 가정 하에 또다른 사건이 일어날 확률을 **조건부 확률**이라고 부른다.

예제 38. 어느 등산 동호회에서 산행지 결정을 위하여 40명의 회원을 대상으로 설악산과 지리산의 선호도를 조사하였더니 다음과 같았다.

성별 \ 산	설악산(B)	지리산(B^c)	합계
남(A)	7	17	24
여(A^c)	11	5	16
합계	18	22	40

40명의 회원 중 임의로 뽑은 한 명의 회원이 남자였을 때, 그 회원이 설악산을 선호하는 회원일 확률을 구하여라.

풀이 40명의 회원 중 임의로 한 명을 뽑는 사건을 S, 남자가 뽑히는 사건을 A, 설악산을 선호하는 사람이 뽑히는 사건을 B라고 하자.

뽑힌 한 명의 회원이 남자였을 때 그 회원이 설악산을 선호할 확률은 $\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{7}{24}$이다. □

위 문제를 통해 다음과 같은 조건부 확률 공식을 얻는다.

> **조건부 확률**
> 확률이 0이 아닌 사건 A에 대하여, 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 **조건부 확률**이라고 하고 $\mathrm{P}(B|A)$로 나타낸다.
> $$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\quad (\text{단, } \mathrm{P}(A)>0)$$

예제 39. 한 개의 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나왔을 때, 그것이 소수일 확률을 구하여라.

풀이 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

이다. 따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}.$$ □

예제 40. 아래 표는 어느 학급 학생 50명에 대하여 어떤 영화의 관람 여부에 따른 남녀 학생 수를 조사하여 나타낸 것이다.

관람 \ 학생	남학생	여학생	합계
관람	12	18	20
미관람	8	12	20
합계	20	30	50

이 중에서 임의로 뽑은 한 명이 여학생이었을 때, 그 학생이 영화를 관람한 학생일 확률을 구하여라.

풀이 임의로 뽑은 학생이 여학생인 사건을 A, 영화를 관람한 학생인 사건을 B라고 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{30}{50}=\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}.$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{9/25}{3/5}=\frac{3}{5}.$$ □

예제 41. 두 사건 A, b에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\frac{3}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값을 구하여라.

풀이 $\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\mathrm{P}((A\cup B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{10}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{7}{10}$$

이다. $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 다음을 얻는다.

$$\frac{7}{10}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$이다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1/5}{1/2}=\frac{2}{5}.$$ □

> **확률의 곱셈 정리**
> 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률은 다음과 같다.
> ① $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$ (단, $\mathrm{P}(A)>0$)
> ② $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)$ (단, $\mathrm{P}(B)>0$)

예제 42. 10장의 복권 중 4장의 당첨 복권이 들어 있는 상자에서 갑, 을의 순서로 각각 1장씩 뽑을 때, 다음을 구하여라. (단, 뽑은 복권은 다시 넣지 않는다.)
(1) 갑, 을이 모두 당첨 복권을 뽑을 확률
(2) 을이 당첨 복권을 뽑을 확률

풀이 갑, 을이 당첨 복권을 뽑는 사건을 각각 A, B라 하자.
(1) 갑이 당첨 복권을 뽑을 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}$.
갑이 당첨 복권을 뽑았을 때 을도 당첨 복권을 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}.$$

(2) 갑이 당첨 복권을 뽑고 을도 당첨 복권을 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{15}.$$

갑이 당첨 복권을 뽑지 않고 을이 당첨 복권을 뽑을 확률은

$$\mathrm{P}(A^c\cap B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{15}.$$

사건 $A\cap B$와 사건 $A^c\cap B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{2}{5}.$$ □

예제 43. 주머니 A에는 흰 바둑돌 4개, 검은 바둑돌 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 바둑돌 2개, 검은 바둑돌 4개가 들어 있다 A, B 두 주머니 중에서 한 주머니를 임의로 택하여 2개의 바둑돌을 동시에 꺼냈더니 흰 바둑돌과 검은 바둑돌이 각각 한 개씩 나왔을 때, 이 바둑돌 2개가 모두 주머니 A에서 나왔을 확률을 구하여라.

풀이 주머니 A를 택하는 사건을 A, 주머니 B를 택하는 사건을 B, 흰 바둑돌과 검은 바둑돌이 각각 한 개씩 나오는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7},$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$$

이므로

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{2}{7}+\frac{4}{15}=\frac{58}{105}$$

이다. 따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{2/7}{58/105}=\frac{15}{29}.$$ □

사건의 독립과 종속

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나거나 일어나지 않는 것이 사건 B가 일어날 확률에 영향을 미치지 않을 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^c)=\mathrm{P}(B)$$

일 때 두 사건 A와 B는 서로 **독립**이라고 말하고, 서로 독립인 두 사건을 **독립사건**이라고 부른다.

두 사건 A, B가 서로 독립이 아닐 때, 즉

$$\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B|A^c) \text{ 또는 } \mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$$

일 때, 두 사건 A와 B는 **서로 종속**이라고 말하고, 서로 종속인 두 사건을 **종속사건**이라고 부른다.

예제 44. 두 사건 A, B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}$$

일 때 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(B|A)$ (2) $\mathrm{P}(A|B)$

풀이 (1) $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$ □

참고 두 사건이 배반사건이면 두 사건은 동시에 일어나지 않으므로 한 사건이 일어나면 다른 사건은 일어날 수 없다. 이것은 두 사건이 서로 일어날 확률에 영향을 미치므로 두 사건은 서로 종속임을 뜻한다.

한편 두 사건이 서로 독립이면 한 사건이 일어나는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 주지 않으므로 두 사건은 동시에 일어날 수 있다. 이것은 두 사건이 서로 배반사건이 아님을 뜻한다. □

독립의 조건

$\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$일 때, 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B).$$

증명 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이다. 역으로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$$ ■

예제 45. 다음을 만족시키는 두 사건 A, B가 서로 독립인지 종속인지 조사하여라.

(1) $\mathrm{P}(A)=0.5$, $\mathrm{P}(B)=0.6$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.4$

(2) $\mathrm{P}(A)=0.25$, $\mathrm{P}(B)=0.4$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.1$

풀이 (1) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.5\times0.6=0.3\neq\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

(2) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.25\times0.4=0.1=\mathrm{P}(A\cap B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다. □

참고 두 사건 A, B가 서로 독립일 때

① A와 B^c도 서로 독립이다.

② A^c와 B도 서로 독립이다.

③ A^c와 B^c도 서로 독립이다.

증명 ① $\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)$임을 보이면 된다.

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap B^c)$$

이므로 이항하여 정리하면

$$\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$$

이다. 이때 $1-\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B^c)$이므로 다음을 얻는다.

$$\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)$$

③ $\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)$임을 보이면 된다.

$$\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\mathrm{P}((A\cup B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cup B),$$
$$\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^c\cap B^c)&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}\\&=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap B)\\&=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)\end{aligned}$$ ■

예제 46. 승부차기의 성공률이 각각 0.7, 0.8인 두 선수 A, B가 차례로 승부차기를 할 때, 다음을 구하여라.

(1) A, B 모두 승부차기에 성공할 확률

(2) A는 승부차기에 성공하고 B는 성공하지 못할 확률

(3) A, B 중 적어도 한 명이 승부차기에 성공할 확률

풀이 두 선수 A, B가 승부차기에 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면 A와 B는 서로 독립이다. 이때 A와 B^c, A^c와 B, A^c와 B^c도 각각 서로 독립인 사건들이다.

(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.7\times0.8=0.56$.

(2) $\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)=0.7\times(1-0.8)=0.14$.

(3) $1-\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=1-\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)=1-(1-0.7)(1-0.8)$
$=1-0.06=0.94$. □

예제 47. A, B 두 사람이 번갈아가며 한 개의 주사위를 던져서 먼저 6의 눈이 나오는 사람이 이기기로 하였다. A부터 시작하여 승부가 날 때까지 주사위를 던진다고 할 때, A가 이길 확률을 구하여라.

풀이 A가 1회에 이길 확률은 $\frac{1}{6}$,

A가 3회에 이길 확률은 $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$

A가 5회에 이길 확률은 $\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}$,

A가 7회에 이길 확률은 $\left(\frac{5}{6}\right)^6\cdot\frac{1}{6}$,

⋮

각각의 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}+\cdots=\frac{\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{6}{11}.$$ □

독립시행의 확률

동일한 시행을 여러 번 반복할 때, 각 시행에서 일어나는 사건이 서로 독립인 경우 이러한 시행을 **독립시행**이라고 부른다. 1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$$ {}_nC_r\, p^r (1-p)^{n-r} \quad (\text{단, } 0 \le r \le n) $$

예제 48. 한 개의 주사위를 4번 던져서 1의 눈이 3번 나올 확률을 구하여라.

풀이 ${}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{324}$. □

예제 49. 한 개의 동전을 5번 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 앞면이 3번 나올 확률

(2) 앞면이 4번 이상 나올 확률

(3) 앞면이 적어도 2번 나올 확률

풀이 (1) ${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$.

(2) 앞면이 4번 나올 확률은 ${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$,

앞면이 5번 나올 확률은 ${}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$.

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$.

(3) 앞면이 0번 나올 확률은 ${}_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$,

앞면이 1번 나올 확률은 ${}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$.

따라서 구하는 확률은 $1-\left(\frac{1}{32}+\frac{5}{32}\right)=\frac{13}{16}$. □

5 이산확률변수와 확률분포

어떤 시행의 결과에 따라 표본공간의 각 원소에 하나의 실숫값을 대응시키고, 그 값에 확률이 각각 주어지는 변수를 **확률변수**라고 한다. 확률변수 X가 어떤 값 x를 취할 확률을 기호로

$$ \mathrm{P}(X=x) $$

로 나타낸다.

확률변수 X가 취하는 값과 그 값을 취할 확률 사이의 대응 관계를 X의 **확률분포**라고 부른다.

확률변수 X가 취할 수 있는 값이 유한개이거나 자연수와 같이 셀 수 있을 때, X를 **이산확률변수**라고 부른다.

이산확률변수 X가 취할 수 있는 값이 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$일 때, X의 각 값에 X가 그 값을 취할 확률 $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_n$을 대응시키는 함수

$$ \mathrm{P}(X=x_i)=p_i $$

를 이산확률변수 X의 **확률질량함수**라고 부른다.

이산확률변수

이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$일 때

(1) 확률질량함수의 성질

① $0 \le p_i \le 1$

② $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

③ $\mathrm{P}(x_i \le X \le x_j) = \sum_{k=i}^{j}\mathrm{P}(X=x_k) = \sum_{k=i}^{j} p_k$ (단, $i \le j$)

(2) 평균(기댓값) : $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

(3) 분산 : $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\{(X-m)^2\} = \sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i$

$= \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$

(4) 표준편차 : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$

증명 (3) 평균을 m이라고 하면

$$ \begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m^2 + m^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m^2 \\ &= \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 \end{aligned} $$ ■

예제 50. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 아래와 같다.

x	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	a	$\frac{1}{6}$	1

이때 다음에 답하여라.

(1) 상수 a의 값을 구하여라.

(2) $\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=3)$의 값을 구하여라.

(3) $\mathrm{P}(X<2)$의 값을 구하여라.

풀이 이산확률변수의 확률분포표는 상대도수분포표와 같은 것이라고 생각하면 쉽다.

(1) $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+a+\frac{1}{6}=1$이므로 $a=\frac{1}{3}$.

(2) $\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

(3) $\mathrm{P}(X<2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$. □

예제 51. 확률변수 X의 확률질량함수가

$$ \mathrm{P}(X=x)=\frac{x}{k} \quad (x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) $$

일 때, 다음에 답하여라.

(1) 상수 k를 구하여라.

(2) $\mathrm{P}(2 \le X \le 4)$의 값을 구하여라.

풀이 (1) $\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}+\frac{5}{k}=1$이므로 $k=15$.

(2) $\mathrm{P}(2 \le X \le 4)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}=\frac{3}{5}$. □

예제 52. 확률변수 X의 확률분포가 아래 표와 같을 때, X의 기댓값을 구하여라.

x	2	4	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	1

풀이 $\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{2}+8\cdot\frac{3}{8}=\frac{21}{4}$. □

평균, 분산, 표준편차의 성질

a, b가 상수일 때

① 평균 : $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

② 분산 : $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

③ 표준편차 : $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

증명 확률변수 X의 평균을 m이라고 하고 $Y=aX+b$라고 하자.

① $\mathrm{E}(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i$
$=a\mathrm{E}(X)+b$

② $\mathrm{V}(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-E(Y)\}^2p_i$
$=\sum_{i=1}^{n}\{(ax_i+b)-(am+b)\}^2p_i$
$=\sum_{i=1}^{n}a^2(x_i-m)^2p_i$
$=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=a^2\mathrm{V}(X)$

③ $\sigma(aX+b)=\sqrt{\mathrm{V}(aX+b)}=\sqrt{a^2\mathrm{V}(X)}=|a|\sigma(X)$. ■

예제 53. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 아래와 같다.

x	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

이때 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{E}(3X-1)$ (2) $\mathrm{V}(2X+3)$ (3) $\sigma(-2X+1)$

풀이 $\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}=2$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=1^2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{4}-2^2=\frac{1}{2}$,

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) $\mathrm{E}(3X-1)=3\mathrm{E}(X)-1=3\cdot2-1=5$.

(2) $\mathrm{V}(2X+3)=2^2\mathrm{V}(X)=4\cdot\frac{1}{2}=2$.

(3) $\sigma(-2X+1)=|-2|\sigma(X)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. □

이항분포

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}$$

이다. (단, $q=1-p$) 이와 같은 확률분포를 **이항분포**라고 부르고 기호로 $\mathrm{B}(n,\ p)$로 나타낸다.

이때 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

① 평균 : $\mathrm{E}(X)=np$

② 분산 : $\mathrm{V}(X)=npq$

③ 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

증명 ① $\mathrm{E}(X)=0\times{}_n\mathrm{C}_0p^0q^n+1\times{}_n\mathrm{C}_1p^1q^{n-1}$
$+2\times{}_n\mathrm{C}_2p^2q^{n-2}+\cdots+n\times{}_n\mathrm{C}_np^nq^n$
$=\sum_{r=0}^{n}r\,{}_n\mathrm{C}_rp^rq^{n-r}=\sum_{r=0}^{n}r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}p^rq^{n-r}$
$=\sum_{r=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}p\cdot p^{r-1}q^{n-r}$
$=np\sum_{r=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}p^{r-1}q^{n-r}$
$=np\sum_{r=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}p^{r-1}q^{n-r}$
$=np(p+q)^{n-1}=np$

② $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\sum_{r=0}^{n}r^2\,{}_n\mathrm{C}_rp^rq^{n-r}-(np)^2$
$=\sum_{r=0}^{n}(r^2-r+r)\,{}_n\mathrm{C}_rp^rq^{n-r}-(np)^2$
$=\sum_{r=0}^{n}r(r-1)\,{}_n\mathrm{C}_rp^rq^{n-r}+\sum_{r=0}^{n}r\,{}_n\mathrm{C}_rp^rq^{n-r}-(np)^2$
$=n(n-1)p^2\sum_{r=2}^{n}{}_{n-2}\mathrm{C}_{r-2}p^{r-2}q^{n-r}+np-(np)^2$
$=n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2}{}_{n-2}\mathrm{C}_kp^kq^{n-2-k}+np-(np)^2$
$=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}+np-n^2p^2$
$=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np(1-p)=npq$

다른 방법의 증명 ① 이항정리에서

$$(x+q)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_rx^rq^{n-r}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$n(x+q)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}r\,{}_n\mathrm{C}_rx^{r-1}q^{n-r}$$

양변에 x를 곱하면

$$nx(x+q)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}r\,{}_n\mathrm{C}_rx^rq^{n-r} \quad\cdots④$$

양변에 $x=p$를 대입하면

$$np(p+q)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}r\,{}_n\mathrm{C}_rp^rq^{n-r}$$

여기서 우변은 $\mathrm{E}(X)$와 같고, $p+q=1$이므로

$$\mathrm{E}(X)=np(p+q)^{n-1}=np.$$

② 위 ④의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$n(x+q)^{n-1}+n(n-1)x(x+q)^{n-2}=\sum_{r=0}^{n} r^2{}_nC_r x^{r-1}q^{n-r}$$

양변에 x를 곱하면

$$nx(x+q)^{n-1}+n(n-1)x^2(x+q)^{n-2}=\sum_{r=0}^{n} r^2{}_nC_r x^r q^{n-r}$$

$x=p$를 대입하면

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{r=0}^{n} r^2{}_nC_r p^r q^{n-r}\\&=np(p=q)^{n-1}+n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}\\&=np+n(n-1)p^2=npn^2p^2-np^2\end{aligned}$$

그런데 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$V(X)=np+n^2p^2-np^2-(np)^2=np(1-p)=npq.$$ ■

예제 54. 확률변수 X가 이항분포 $B\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$을 따를 때 다음을 구하여라.

(1) $P(X=1)$ (2) $P(X=3)$

풀이 (1) $P(X=1)={}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$.

(2) $P(X=3)={}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$. □

예제 55. 발아율이 90%인 씨앗을 100개 심었을 때, 발아되는 씨앗의 개수를 확률변수 X라고 하자. 이때 X의 평균과 분산을 구하여라.

풀이 X는 이항분포 $B(100,\ 0.9)$를 따른다. 따라서

$E(X)=100\times0.9=90,\ V(X)=100\times0.9\times0.1=9.$ □

예제 56. 치료율이 60%인 약을 n명의 환자에게 투여하였을 때 치료된 환자의 수를 확률변수 X라 하면 $E(X)=48$이라고 한다. 다음에 답하여라. n의 값과 $V(X)$의 값을 구하여라.

풀이 X는 이항분포 $B(n,\ 0.6)$을 따른다. 이때 $E(X)=48$이므로 $0.6n=48$ 즉 $n=80$이다. 또한

$$V(X)=npq=np(1-p)=80\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{95}{5}$$

이다. □

큰 수의 법칙

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n번의 독립 시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 하면 임의의 양수 h에 대하여

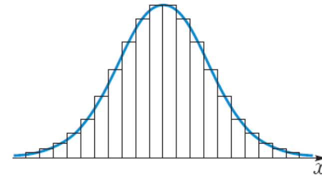
$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)=1$$

이다.

참고 큰 수의 법칙에 의하면 시행 횟수가 충분히 클 때 통계적 확률은 수학적 확률에 가까워짐을 알 수 있다. 따라서 수학적 확률을 구하기 어려운 경우에 시행 횟수가 충분히 크면 통계적 확률을 대신 사용할 수 있다. □

6 연속확률변수와 확률분포

강수량, 시험 점수, 신생아의 체중 등과 같은 자연 현상이나 사회 현상을 관찰하여 얻은 자료의 상대도수를 계급의 크기를 작게 하여 히스토그램으로 나타내면 자료의 개수가 커질수록 오른쪽 그림과 같이 어떤 값을 중심으로 대칭적으로 분포하며 중심에서 멀어질수록 도수가 작아지는 종 모양의 곡선에 가까워진다.



이러한 분포를 정규분포라고 부른다. 정규분포의 개념을 알기 위하여 먼저 연속확률변수에 대하여 살펴보자.

확률변수 X가 어떤 구간에 속하는 모든 실숫값을 취할 때, X를 **연속확률변수**라고 부른다.

구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 정의된 연속확률변수 X에 대하여 세 조건

① $f(x)\ge0$

② $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=1$

③ $P(a\le X\le b)=\int_{a}^{b}f(x)dx$ (단, $\alpha\le a\le b\le\beta$)

를 모두 만족시키는 연속함수 $f(x)$를 X의 **확률밀도함수**라고 부른다. $(\alpha\le x\le\beta)$

참고 연속확률변수의 확률밀도함수의 정의는 이산확률변수의 확률밀도함수의 정의에서 합기호(시그마)를 적분으로 바꾼 것이라고 생각하면 된다. □

예제 57. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x\quad(0\le x\le4)$$

일 때, $P(0\le X\le2)$의 값을 구하여라.

풀이 $P(0\le X\le2)=\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x\right)dx=\frac{3}{4}$. □

예제 58. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=kx\quad(0\le x\le2)$$

일 때 다음에 답하여라.

(1) 상수 k의 값을 구하여라.

(2) $P(0\le X\le1)$의 값을 구하여라.

풀이 (1) 확률밀도함수의 정의에 따라

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=\int_{0}^{2}kx\,dx=2k$$

의 값이 1이 되어야 하므로 $k=\frac{1}{2}$이다.

(2) $f(x)=\frac{1}{2}x$이므로

$$P(0\le X\le1)=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{4}.$$ □

연속확률변수의 평균, 분산, 표준편차

구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$일 때 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

① 평균 : $\mathrm{E}(X)=m=\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx$

② 분산 : $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\{(X-m)^2\}=\int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2 f(x)dx$

$=\int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)dx-m^2=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

③ 표준편차 : $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

증명 ② $V(X)=E((X-m)^2)$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2 f(x)\,dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2 f(x)-2mxf(x)+m^2 f(x)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}x^2 f(x)\,dx-2m\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)\,dx+m^2\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}x^2 f(x)\,dx-2m\cdot m+m^2\cdot 1$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}x^2 f(x)\,dx-m^2=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$ ■

예제 59. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=3x^2 \quad (0\le x\le 1)$$

일 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 구하여라.

풀이 $\mathrm{E}(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2 dx=\dfrac{3}{4}.$

$$\mathrm{V}(X)=\int_0^1 x^2 f(x)dx-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2 dx-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80}.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{3}{80}}=\frac{\sqrt{15}}{20}.$$ □

평균, 분산, 표준편차의 성질

$a,\ b$가 상수일 때

① 평균 : $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

② 분산 : $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

③ 표준편차 : $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

정규분포를 정의하기 위해서는 오일러 상수를 사용한다. 극한

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

은 무리수 $2.718281828459045\cdots$에 수렴한다. 이 값을 **오일러 상수**라고 부르고 e로 나타낸다. 즉

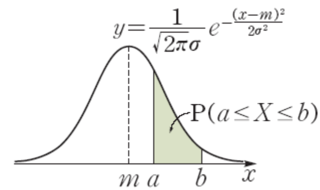
$$e=2.718281828459045\cdots$$

이다. [오일러 상수를 네이피어 상수라고 부르기도 한다.] [참고로 오일러 상수 중에서는 γ로 나타내는 값도 있는데, 이것은 고등학교 범위에서 벗어나므로 여기서 다루지 않는다.]

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

일 때, X의 확률분포를 **정규분포**라고 부르고, $f(x)$의 그래프를 **정규분포곡선**이라고 부른다. ($m,\ \sigma$는 상수이고 $\sigma>0$.)



위와 같이 정의된 정규분포의 평균은 m이고 표준편차는 σ이다. 이러한 정규분포를 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$으로 나타낸다.

참고 정규분포의 확률은 다음과 같이 구한다.

$$\mathrm{P}(a\le X\le b)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$ □

정규분포곡선의 성질

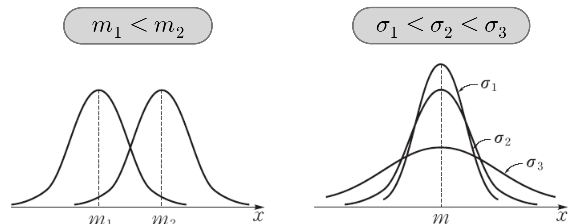
정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선에는 다음과 같은 성질이 있다.

① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양이고, x축이 점근선이다.

② 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

③ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 클수록 곡선의 가운데 부분이 낮아지고 옆으로 퍼진 모양이 된다.

④ σ의 값이 일정할 때, m의 값이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 변하지 않는다.



우리가 실제로 살고 있는 세상에서 일어나는 일들은 정규분포를 따르는 경우가 많다. 그러나 정규분포의 정의가 상당히 복잡하여서 확률을 구하기가 어렵다. 따라서 정규분포를 평균이 0이고 표준편차가 1인 표준정규분포로 변환하여 사용한다.

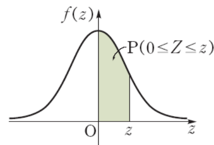
평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 **표준정규분포**라고 부른다. 확률변수 Z가 표준정규분포를 따를 때, Z의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

일반적인 정규분포를 표준정규분포로 바꾸는 방법은 다음과 같다.

> **정규분포의 표준화**
>
> X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수
>
> $$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$
>
> 은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
>
> 이와 같이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X를 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수 Z로 바꾸는 것을 **표준화**한다고 말한다. 이때 다음이 성립한다.
>
> $$\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}\left(\frac{a-m}{\sigma} \le Z \le \frac{b-m}{\sigma}\right)$$

임의의 양수 z에 대하여 $0 \le Z \le z$일 확률 $\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같고, 그 값은 표준정규분포표에서 찾을 수 있다.



표준정규분포표

z	0.00	0.01	0.02	⋯
⋮			↓	
1.7	→	→	0.4573	
⋮				

이를테면 위의 표준정규분포표에서

$$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.72)=0.4573$$

임을 알 수 있다.

한편 표준정규분포의 확률밀도함수 $f(z)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\mathrm{P}(-z \le Z \le 0)=\mathrm{P}(0 \le Z \le z) \ \ (\text{단, } z>0)$$

예제 60. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(Z \le 2)$ (2) $\mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 2.5)$

풀이 (1) $\mathrm{P}(Z \le 2)=\mathrm{P}(Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

(2) $\mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 2.5)$

$=\mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)+\ \mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)$

$=0.4332+0.4938=0.9270$ □

일반적인 정규분포의 확률을 구할 때에는 표준화하여 표준정규분포의 확률을 구하면 된다.

예제 61. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 20^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(170 \le X \le 190)$을 구하여라.

풀이 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 20^2)$을 따르므로 이것을 표준화하면

$$Z=\frac{X-150}{20}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(170 \le X \le 190)=\mathrm{P}\left(\frac{170-150}{20} \le Z \le \frac{190-150}{20}\right)$$

$=\mathrm{P}(1 \le Z \le 2)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$ □

예제 62. 어느 과수원에서 수확한 포도 한 송이의 무게는 평균이 300 g이고 표준편차가 25 g인 정규분포를 따른다고 한다. 포도 한 송이를 택할 때, 무게가 340 g이상일 확률을 구하여라.

풀이 포도 한 송이의 무게를 X라고 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 25^2)$을 따르므로

$$Z=\frac{X-300}{25}$$

은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 무게가 340 g 이상일 확률은

$$\mathrm{P}(X \ge 340)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{340-300}{25}\right)$$

$=\mathrm{P}(Z \ge 1.6)$

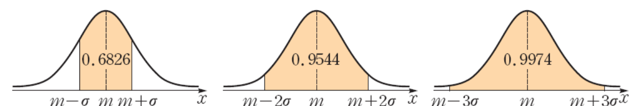
$=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.6)$

$=0.5-0.4452=0.0548$ □

한편 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(|X-m|<\sigma)=\mathrm{P}(-1<Z<1)=0.6826$$
$$\mathrm{P}(|X-m|<2\sigma)=\mathrm{P}(-2<Z<2)=0.9544$$
$$\mathrm{P}(|X-m|<3\sigma)=\mathrm{P}(-3<Z<3)=0.9974$$

즉 X는 평균에서 σ, 2σ, 3σ 범위 내에 있을 확률이 각각 0.6826, 0.9544, 0.9974이다.



예제 63. 어느 고등학교 남학생 500명의 키는 평균 170cm, 표준편차 5cm인 정규분포를 따른다고 한다. 키가 165cm 이상 180cm 이하인 남학생은 약 몇 명인지 구하여라.

풀이 남학생의 키를 X라 하면 확률변수 X는 평균이 170, 표준편차가 5인 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 5^2)$을 따르므로

$$Z=\frac{X-170}{5}$$

라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

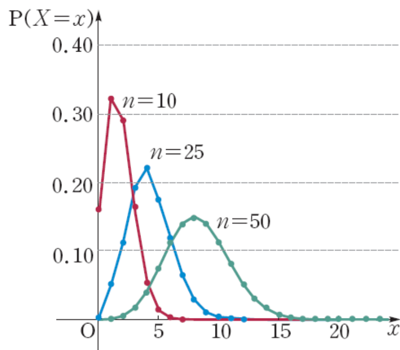
$$\mathrm{P}(165 \le X \le 180)=\mathrm{P}\left(\frac{165-170}{5} \le Z \le \frac{180-170}{5}\right)$$

$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$

따라서 구하는 남학생 수는 $500 \times 0.8185 \fallingdotseq 409$(명). □

$n=10,\ 25,\ 50$일 때의 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{6}\right)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



이때 이항분포는 n의 값이 커질수록 점차 정규분포에 가까워짐을 알 수 있다. 실제로 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 평균이 np이고 분산이 npq인 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$에 가까워진다는 사실이 알려져 있다.

따라서 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 확률변수

$$Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$$

는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이항분포와 정규분포의 관계
확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다.

참고 n이 충분히 크다는 것은 일반적으로 $np \geq 5$이고 $nq \geq 5$일 때를 뜻한다. □

참고 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, n의 값이 크면 X가 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따르므로

$$Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$$

로 표준화하여 확률을 구한다. □

예제 64. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(180 \leq X \leq 205)$를 구하여라.

풀이 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{2}=200,\ \sigma(X)=\sqrt{400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=10$$

이때 $n=400$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(180 \leq X \leq 205)&=\mathrm{P}\left(\frac{180-200}{10} \leq \frac{X-200}{10} \leq \frac{205-200}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 0.5)\\&=\mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 0)+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.5)\\&=0.4772+0.1915=0.6687\end{aligned}$$ □

예제 65. 은정이네 학교 학생들을 대상으로 선호하는 여름 휴가 장소를 조사하였더니 학생들의 40%는 바다를 선호하였다. 이 학교 학생 150명을 임의로 골라 선호하는 여름 휴가 장소를 조사하였을 때, 바다를 선호하는 학생의 수가 63명 이상일 확률을 구하여라.

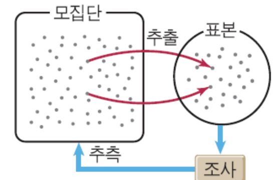
풀이 바다를 선호하는 학생의 수를 X라고 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(150,\ 0.4)$를 따르므로 X의 평균과 표준편차는

$$\mathrm{E}(X)=150\times0.4=60,\ \sigma(X)=\sqrt{150\times0.4\times0.6}=6$$

이때 $n=150$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 6^2)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \geq 63)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-60}{6} \geq \frac{63-60}{6}\right)=\mathrm{P}(Z \geq 0.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.5)\\&=0.5-0.1915=0.3085\end{aligned}$$ □

7 모평균의 추정



통계 조사에서 조사 대상 전체를 조사하는 것을 **전수조사**라고 부르고, 일부분만 택하여 조사하는 것을 **표본조사**라고 부른다. 표본조사에서 조사 대상 전체를 **모집단**이라고 부르고, 조사하기 위하여 뽑은 모집단의 일부분을 **표본**이라고 부른다. 또 표본에 포함된 대상의 개수를 **표본의 크기**라고 부른다.

모집단에 속하는 각 대상을 같은 확률로 추출하는 방법을 **임의추출**이라고 부른다. 또 한 개의 자료를 추출한 후 추출한 것을 되돌려 놓고 다시 추출하는 것을 **복원추출**이라고 부르며, 되돌려 놓지 않고 계속하여 추출하거나 동시에 여러 개를 추출하는 것을 **비복원추출**이라고 부른다.

모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를 X라 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **모평균**, **모분산**, **모표준편차**라고 부르고 이것을 기호로 m, σ^2, σ로 나타낸다.

모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본을 각각 X_1, X_2, $\cdots$, X_n이라 할 때, 이들의 평균, 분산, 표준편차를 각각 **표본평균**, **표본분산**, **표본표준편차**라고 부르고 기호로 $\overline{X}$, S^2, S로 나타낸다.

표본의 평균, 분산
모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본이 X_1, $\cdots$, X_n일 때

① $\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

② $S^2=\frac{1}{n-1}\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\}$
$\quad=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

참고 표본분산은 모분산과의 차이를 줄이기 위해 편차의 제곱의 합을 n이 아닌 $n-1$로 나눈다. □

일반적으로 평균이 m이고 분산이 σ^2인 어떤 모집단에서 복원추출로 크기 n인 표본 $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$을 독립시행으로 추출하였을 때, $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$은 각각 X와 같은 확률분포를 가진다. 따라서

$$\mathrm{E}(X_1)=\mathrm{E}(X_2)=\cdots=\mathrm{E}(X_n)=m,$$
$$\mathrm{V}(X_1)=\mathrm{V}(X_2)=\cdots=V(X_n)=\sigma^2$$

이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i)=m$$
$$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$$

이 성립한다.

표본평균의 평균, 분산, 표준편차
모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의로 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\quad \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\quad \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

예제 66. 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10	20	30	40	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

이 모집단에서 크기가 5인 표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산을 구하여라.

풀이 주어진 X의 확률분포에서

$$\mathrm{E}(X)=10\cdot\frac{1}{4}+20\cdot\frac{1}{4}+30\cdot\frac{1}{4}+40\cdot\frac{1}{4}=25$$
$$\mathrm{V}(X)=10^2\cdot\frac{1}{4}+20^2\cdot\frac{1}{4}+30^2\cdot\frac{1}{4}+40^2\cdot\frac{1}{4}=125$$

이때 표본의 크기가 5이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=25,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{125}{5}=25.$$ □

표본평균의 분포
모평균이 m, 모분산이 σ^2인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 다음이 성립한다.

① 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

② 모집단이 정규분포를 따르지 않더라도 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

예제 67. 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 40^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{E}(\overline{X}),\ \mathrm{V}(\overline{X})$ (2) $\mathrm{P}(196\le\overline{X}\le 204)$

풀이 (1) $\mathrm{E}(\overline{X})=200,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{40^2}{100}=16.$

(2) 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 4^2)$을 따르므로

$$Z=\frac{\overline{X}-200}{4}$$

으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(196\le\overline{X}\le 204)=\mathrm{P}\left(\frac{196-200}{4}\le Z\le\frac{204-200}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=2\times 0.3413=0.6826.$$ □

예제 68. 어느 회사에서 생산하는 핸드크림의 무게는 평균 50g, 표준편차 16g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산되는 핸드크림 중 임의추출한 제품 64개의 무게의 평균이 48g 이상 54g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

풀이 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 16^2)$을 따르고, 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\ \frac{16^2}{64}\right)$ 즉 $\mathrm{N}(50,\ 2^2)$을 따른다. 따라서

$$Z=\frac{\overline{X}-50}{2}$$

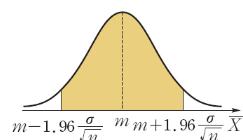
으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(48\le\overline{X}\le 54)=\mathrm{P}\left(\frac{48-50}{2}\le Z\le\frac{54-50}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.3413+0.4772=0.8185.$$ □

모집단의 성질을 알려고 할 때, 전수조사가 어려운 경우에는 모집단의 일부인 표본을 조사하여 얻은 정보를 이용하여 모집단의 성질을 추측할 수 있다. 이대 표본에서 얻은 자료를 근거로 모집단의 특성을 나타내는 값을 추측하는 것을 **추정**이라고 부른다.

표본평균을 이용하여 모평균을 추정하는 방법을 알아보자.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출했을 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2/n)$을 따른다. 따라서



$\overline{X}$를 표준화한 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 한편 표준정규분포의 성질에 의하여

$$\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$$

이다.

그러므로 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$P\left(-1.96 \le \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 1.96\right)$$

$$=P\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

위의 식은 구간

$$\left[\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

에 모평균 m이 포함될 확률이 0.95임을 나타내므로 이 구간을 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간이라고 부른다.

모평균의 추정

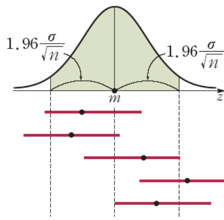
정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n표본을 임의추출할 때, 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 신뢰도에 따른 모평균 m의 신뢰구간은 다음과 같다.

① 신뢰도 95%의 신뢰구간 : $\left[\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

② 신뢰도 99%의 신뢰구간 : $\left[\overline{X}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

참고 표본의 크기 n이 충분히 크면 모표준편차 σ와 표본표준편차 S가 거의 같아지므로 σ 대신 S를 사용하면 된다. □

참고 표본평균 $\overline{X}$는 확률변수이므로 추출되는 표본에 따라 그 값이 달라지고 신뢰구간도 달라진다. 신뢰도 95%의 신뢰구간이란 크기가 n인 표본을 여러 번 추출하여 신뢰구간을 만들 때, 모평균 m을 포함하는 구간이 약 95%라는 뜻이다.



예제 69. 대학수학능력시험 수리영역 나형에 응시한 수험생 중 임의추출한 2500명의 수험생의 점수는 평균이 65점, 표준편차가 15점이었다. 수리영역 나형에 응시한 전체 수험생의 점수가 정규분포를 따른다고 할 때, 수리영역 나형의 평균 점수 m에 대하여 다음에 답하여라.

(1) 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하여라.

(2) 신뢰도 99%의 신뢰구간을 구하여라.

풀이 (1) 표본평균은 65이고, 표본의 크기 2500이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 15를 사용할 수 있다.

(1) $65-1.96\frac{15}{\sqrt{2500}} \le m \le 65+1.96\frac{15}{\sqrt{2500}}$

$\therefore\ 64.412 \le m \le 65.588.$

(2) $65-2.58\frac{15}{\sqrt{2500}} \le m \le 65+2.58\frac{15}{\sqrt{2500}}$

$\therefore\ 64.226 \le m \le 65.774.$ □

참고 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n표본을 임의추출할 때, 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 신뢰도에 따른 모평균 m의 신뢰구간의 길이는 다음과 같다.

① 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이 : $2\times 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이 : $2\times 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

표본의 크기가 일정할 때 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이는 길어진다. 한편 신뢰도가 일정할 때 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아진다. □

예제 70. 표준편차가 15인 정규분포를 따르는 모집단에서 표본을 임의추출하여 모평균을 신뢰도 95%로 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 2 이하가 되도록 하는 표본의 크기의 최솟값을 구하여라.

풀이 표본의 크기를 n이라 하자. 신뢰도 95%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이가 2 이하가 되어야 하므로

$$2\times 1.96\frac{15}{\sqrt{n}} \le 2,\ \sqrt{n} \ge 29.4,\ n \ge 864.36$$

이다. 따라서 표본의 크기의 최솟값은 865이다. □

예제 71. 정규분포를 따르는 어느 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 모평균을 신뢰도 α%로 추정하였더니 신뢰구간의 길이가 2이었다. 동일한 신뢰도로 추정한 신뢰구간의 길이가 0.5가 되도록 하려면 표본의 크기를 얼마로 해야 하는지 구하여라.

풀이 모표준편차를 σ, 표본의 크기를 n,

$$P(|Z| \le k)=\frac{\alpha}{100}$$

라고 하면 모평균의 신뢰도 α%의 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$n=4$일 때 신뢰구간의 길이가 2이므로

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{3}}=2 \qquad \therefore\ k\sigma=2.$$

이때 신뢰구간의 길이가 0.5가 되도록 하려면

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.5$$

이므로 $n=64$이다. □

8 모비율의 추정

모집단에서의 어떤 사건에 대한 비율을 고려할 때, 그 비율을 그 사건에 대한 **모비율**이라고 하며, 이것을 기호로 p와 같이 나타낸다.

일반적으로 모비율 p의 값을 추정하기 위해서는 모집단에서 임의추출한 표본을 이용할 수 있다. 모집단에서 임의추출한 표본에서의 비율을 그 사건에 대한 **표본비율**이라고 하며, 이것을 기호로 $\hat{p}$로 나타낸다.

표본비율

크기가 n인 표본에서 어떤 사건이 일어나는 횟수를 X라고 할 때, 이 사건에 대한 표본비율 $\hat{p}$은

$$\hat{p}=\frac{X}{n}$$

보기 72. 어느 도시에는 2435명의 고등학생이 있으며 이 중에서 1170명이 여학생이라고 한다. 이 도시에 살고 있는 고등학생을 모집단으로 했을 때 모집단에서 여학생의 비율, 즉 모비율 p는

$$p=\frac{1170}{2435}=0.48$$

한편 모집단에서 임의추출한 300명의 고등학생 중에서 여학생이 141명이면 표본비율 $\hat{p}$는

$$\hat{p}=\frac{141}{300}=0.47$$

□

표본비율 $\hat{p}=\frac{X}{n}$에서 확률변수 X는 크기가 n인 표본에서 어떤 사건이 일어나는 횟수이므로 확률변수 X가 취할 수 있는 값은 $0,\ 1,\ \cdots,\ n$이며, 모집단에서 이 사건이 일어날 확률은 p이다.

그러므로 확률변수 X는 어떤 사건이 일어날 확률이 p인 시행을 n번하였을 때 그 사건이 일어난 횟수이므로 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다.

따라서 확률변수 X의 평균과 분산은 각각

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq\ \ (q=1-p)$$

이고, 표본비율 $\hat{p}$의 평균과 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\hat{p})=\mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{E}(X)=\frac{np}{n}=p$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\mathrm{V}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X)=\frac{npq}{n^2}=\frac{pq}{n}$$

$$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\mathrm{V}(\hat{p})}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

어떤 사건 A가 일어날 확률, 즉 모비율이 p인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본비율 $\hat{p}=\frac{X}{n}$에서 확률변수 X는 n회의 독립시행에서 사건 A가 일어난 횟수이다.

즉 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다.

따라서 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 평균과 분산이 $\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(\hat{p})=\mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n}\mathrm{E}(X)=\frac{1}{n}\cdot np=p,$$

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\mathrm{V}\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{n^2}\cdot npq=\frac{pq}{n}$$

일반적으로 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$르르 따르고,

$$\mathrm{E}(\hat{p})=p,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\frac{pq}{n}$$

이므로 $\hat{p}=\frac{X}{n}$도 근사적으로 정규분포

$$\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$$

를 따른다. 따라서 다음을 얻는다.

표본비율 $\hat{p}$의 분포

모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$에 가까워진다. 따라서

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. $(q=1-p)$

참고 표본의 크기 n이 크다는 것은 보통 $np\geq 5$이고 $nq\geq 5$일 때를 뜻한다. □

예제 73. 어느 회사의 직원 중에서 50%는 정기적으로 운동을 한다고 한다. 이 회사에서 임의로 추출한 64명 중에서 정기적으로 운동을 하는 사람의 비율이 40% 이상이고 57.5% 이하일 확률을 구하여라.

풀이 64명 중에서 정기적으로 운동을 하는 사람의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(0.4\leq\hat{p}\leq 0.575)$이다. 한편 표본의 크기는 $n=64$이고 모비율은 $p=0.5$이므로

$$Z=\frac{\hat{p}-0.5}{\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{64}}}$$

는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(0.4\leq\hat{p}\leq 0.575)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{0.4-0.5}{\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{64}}}\leq\frac{\hat{p}-0.5}{\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{64}}}\leq\frac{0.575-0.5}{\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{64}}}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.6\leq Z\leq 1.2)=0.8301\end{aligned}$$

□

모비율의 신뢰구간

표본비율을 $\hat{p}$이라고 할 때, 표본의 크기 n이 충분히 크면 모비율 p의 신뢰구간은 다음과 같다. (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

① 신뢰도 95%의 신뢰구간

$$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

② 신뢰도 99%의 신뢰구간

$$\left[\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

참고 표본의 크기 n이 충분히 크다는 것은 보통 $n\hat{p} \geq 5$이고 $n\hat{q} \geq 5$일 때를 뜻한다. □

예제 74. 어느 가전제품 회사에서는 새로운 디자인에 대한 선호도를 알아보기 위하여 150명을 임의추출하여 조사하였더니 이들 중에서 96명이 새로운 디자인을 선호하였다. 이때 전체 국민 중에서 새로운 디자인을 선호하는 비율의 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하여라.

풀이 새로운 디자인을 선호하는 표본비율은 $\hat{p} = \dfrac{96}{150} = 0.64$이다. 이때 $n\hat{p} \geq 5$이고 $n\hat{q} \geq 5$이므로

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$$

는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

모비율 p의 신뢰도 95% 신뢰구간의 양 끝값은

$$\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.64 - 1.96\sqrt{\frac{0.64 \times 0.36}{150}} \fallingdotseq 0.563,$$

$$\hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.64 + 1.96\sqrt{\frac{0.64 \times 0.36}{150}} \fallingdotseq 0.717$$

따라서 구하는 신뢰구간은 $[0.563,\ 0.717]$이다. □

세상에서 가장 불행한 사람은
완벽해지려 애쓰는 사람이다.
완벽을 겨루는 경기에는 끝이 없다.
— 나는 오늘도 나를 응원한다.

마리사 피어

삼각함수표

각(θ)	sin θ	cos θ	tan θ
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

각(θ)	sin θ	cos θ	tan θ
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	

상용로그표 (1)

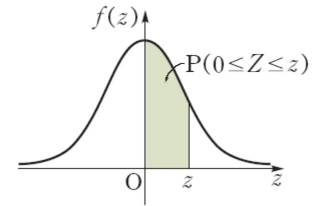
수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

상용로그표 (2)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

표준정규분포표

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$



수	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

참고서적

교과서

- 지학사 6차 교육과정 교과서 (공통수학, 수학 I, 수학 II)
- 중앙교육진흥연구소 7차 교육과정 교과서 (수학 7 · 8 · 9 · 10)
- 도서출판 디딤돌 7차 교육과정 교과서 (수학 7 · 8 · 9)
- 웅진씽크빅 2007 개정 교육과정 교과서 (중학교 수학 1 · 2 · 3)
- 좋은책 신사고 2007 개정 교육과정 교과서 (고등학교 수학, 수학 I, 수학 II, 미적분과 통계 기본, 적분과 통계, 기하와 벡터)
- 교학사 2009 개정 교육과정 교과서 (기초수학, 수학 I, 수학 II, 미적분, 기하와 벡터, 확률과 통계)
- 좋은책 신사고 2009 개정 교육과정 교과서 (수학 I, 수학 II, 미적분, 기하와 벡터, 확률과 통계)
- 미래엔 2009 개정 교육과정 교과서 (수학 I, 수학 II, 미적분, 기하와 벡터, 확률과 통계)
- 천재교과서 2009 개정 교육과정 교과서 (고급수학 I, 고급수학 II)

그 외의 서적

- 김응환 · 이석훈, 통계교육, 경문사 (2008)
- 이창희 · 민경도, 新 수학의 바이블 적분과 통계, 이투스교육 (2012)
- 이슬비, 고등학생을 위한 고급미적분학, 수학 나라의 앨리스 (2013)

